Zadání 6. série

Termín odeslání: 14. května 2007

Příklad 6.1. Z náměstí Tří troubů v Hloupětíně vycházejí tři přímé ulice: Dutohlavá, Dubohlavá a Mikrovlnčí. Úhel mezi každýma dvěma z nich je tupý. Hloupětíňané rozhodli, že v každé ulici postaví památník jednomu z místních významných matematiků. Již vybudovali památník lordu Oakošovi v Dubohlavé ulici a další památníky chtějí postavit tak, aby ulice byly osami vnitřních úhlů v trojúhelníku tvořeném památníky. Určete konstrukčně umístění dalších dvou památníků.

Příklad 6.2. Památník v Dubohlavé ulici tvoří skleněný kužel, dovnitř nějž je vepsáno pět kulových ploch o poloměru r tak, že se 4 kulové sféry dotýkají podstavy kužele, každá z těchto 4 kulových sfér se dotýká dvou dalších, každá se také dotýká pláště kužele a středy těchto kulových ploch tvoří čtverec. Pátá koule je umístěna tak, že se dotýká pláště každé ze 4 zbylých kulových ploch a také se dotýká pláště kuželu. Dovedli byste určit objem kuželu?

Příklad 6.3. Když si Matěj pročítal dějiny Hloupětína, nalezl zajímavou pověst. Ve sklepení místního hradu je prý schován poklad, který střeží p-hlavý drak Hlavkopapka, kde p je prvočíslo. Hlavkopapka sežere všechny odvážlivce, kteří špatně odpoví na otázku, jaké je největší přirozené číslo n takové, že n-tá mocnina hlav draka dělí faktoriál čtvrté mocniny počtu p. Dokázali byste se dostat přes tuto nemilosrdnou saň?

Příklad 6.4. I když hledač pokladu odpoví správně, nemá zdaleka ještě vyhráno. Nalezne sice truhlu s pokladem, ale bez číselného kódu se mu ji nepodaří otevřít. Určete všechny možné kombinace, víte-li, že je hledaný kód deseticiferný ve tvaru $a_0a_1a_2\dots a_9$, přičemž pro všechna $k = 0, 1, \dots, 9$ udává a_k počet výskytů cifry k v kódu.

Příklad 6.5. Matěj už už přemýšlel, že by se vydal poklad získat, ale Henry mu jeho plány překazil. Prý musí své bohatství nabýt poctivou prací. A aby se prý nenudil, tak ať mu honem najde všechny možné hodnoty funkce $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definované vztahem $f(n) = f(f(n + 11))$ pro $n < 101$ a $f(n) = n - 10$ pro $n > 100$. Dokázali byste to také?

Příklad 6.6. Když Matěj spočítal Henryho příklad, rozhodl se, že přeci jen na poklad na chvilku zapomene a vrátil se zpět ke čtení dějin Hloupětína. Našel tam, že v Hloupětíně byly objeveny dva významné pergameny. Na obou byly řešené zajímavé příklady. Bohužel se však dochovala jen zadání těchto příkladů. Na prvním svitku se dokazovalo, že existují reálná čísla A, B taková, že pro každé přirozené číslo n platí:

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{tg} k \cdot \operatorname{tg}(k-1) = A \cdot \operatorname{tg} n + B \cdot n.$$

Poradili byste si s tímto prastarým příkladem?

Příklad 6.7. Na druhém pergamenu byl tento příklad. Bylo dáno přirozené číslo n a reálné číslo k, $0 \leq k \leq n$. Dále byly uvažovány všechny n-tice reálných čísel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, pro něž platí

$$\sum_{i=1}^{n} \sin^2 x_i = k$$

Úkolem bylo najít nejvyšší hodnotu výrazu

$$|\sum_{i=1}^{n} \sin 2x_i|.$$

Dokázali byste vyřešit také úlohu z druhého svitku?

Svá řešení posílejte na adresu

BRKOS
Janáčkovo náměstí 2a
602 00 Brno