Zadání 5. série

Termín odeslání: 2. dubna 2007

Příklad 5.1. Když šli Matěj s Liběnkou spát, vzpomněli si, že jim, když byli ještě malí, povídal jejich tatínek na dobrou noc pohádku. I začali škemrat, že tento večer je úplně ten nejvhodnější k obnovení starých tradic. Inu, odolat prosbám svých dětí, to vskutku Henry nedokázal. A tak, když už byly děti zalezlé v pelíšku, vešel do pokoje a začal vyprávět: „Za devatero horami, devatero řekami, devatero hradbami a za devatero vším, na co si vzpomenete, bylo číselné království. Králem v této zemi bylo přirozené číslo Kárl. Kárl mělo dva syny, též přirozená čísla Mňuka a Fňuka. Jednou Kárl rozhodlo, že musí své syny oženit, a tak se s nimi vydalo hledat jejich nevěsty. Mňuk hledal Mňučku, Fňuk hledal Fňučku. Kárl pravilo, že nevěsty musejí být nesoudělná přirozená čísla a navíc, aby byly hodny královského rodu, musí být součet součinu Fňuka a Fňučky se součinem Mňuka a Mňučky násobek Kárla. A tak chodili světem a hledali a hledali …“ A to už Henry zjistil, že obě děti spinkají. Ráno, když se Liběnka probudila, hnedka se ptala Henryho, jestli vůbec bylo možné, aby si synové našli své nevěsty. Dokažte, že to možné bylo.

Příklad 5.2. Jednoho krásného sluníčkového odpoledne se vydali Matěj s Liběnkou na procházku zasněženou hloupětínskou krajinou. Nejdřív se koulovali, pak dělali andělíčky do sněhu a pak si kreslili různé obrazce. Nejprve Matěj nakreslil konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Liběnka pak dokreslila body A', B', C' a D' tak, že A je středem úsečky $A'D$, B je středem úsečky $B'A$, C je středem úsečky $C'B$ a D je středem úsečky $D'C$. Potom od Matěje chtěla, aby jí dokázal, že obsah čtyřúhelníka $A'B'C'D'$ je pětkrát větší než obsah čtyřúhelníka $ABCD$. Dokázali byste to také?

Příklad 5.3. Aby se Liběnka mezitím nenudila, vymyslel jí Matěj také příklad. Měla zkonstruovat trojúhelník ABC, znala-li velikosti stran AB a BC a věděla-li,že těžnice na tyto dvě strany jsou navzájem kolmé. Zvládli byste i Liběnčinu konstrukční úlohu?

Příklad 5.4. Když se Matěj s Liběnkou vrátili, udělali si na zahřátí horký čaj a povídali si u krbu. Vtom přišel Henry a už od dveří hulákal: „Děcka pozor, mám pro vás perfektní příklad na takové to domácí počítání: Jsou dána tři různá celá čísla x, y, z. Dokažte, že $(x-y)^5+(y-z)^5+(z-x)^5$ je dělitelné $5(x-y)(y-z)(z-x)$.“ Liběnka s Matějem se smáli a s radostí se vrhli do počítání. Zvládli byste také spočítat tento Henryho příklad?

Příklad 5.5. Na hranici Lenošína a Hloupětína stojí starý hrad. Jeho půdorys má tvar pravidelného n-úhelníku, ve kterém platí, že rozdíl délek nejdelší a nejkratší jeho úhlopříčky je roven délce strany tohoto mnohoúhelníku. Matěj se rozhodl, že zjistí, kolik stran tento mnohoúhelník má. Vydal se k hradu a začal počítat. Když už jej obíhal počtvrté a pořád se nemohl dopočítat, dospěl k názoru, že tento způsob nebude tím nejvhodnějším k určení počtu stran mnohoúhelníku. Pomozte Matějovi určit, jaký pravidelný mnohoúhelník je půdorysem hradu, pokud je více možností, najděte je všechny.

Příklad 5.6. Zatímco Matěj bádal po místních památkách, přišli ke Klevrům zástupci Lenošína. Opět si nevěděli rady s nějakým příkladem. Starý dobrák Henry jim samozřejmě pomohl. Lenošínští po něm chtěli, aby dokázal, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{(2n)!}{(n!\,n!)} < 2^{2n}$ a že číslo $\frac{(2n)!}{(n!\,n!)}$ je dělitelné všemi prvočísly p, která splňují $n < p < 2n$ (Henry samozřejmě musel také dokázat, že číslo $\frac{(2n)!}{(n!n!)}$ je celé). Když se to Henrymu povedlo, měli v záloze ještě jeden problém: Nechť $\pi(x)$ značí počet prvočísel menších nebo rovných x. Ukažte, že pro všechna přirozená $n > 1$ platí $\pi(2n) < \pi(n) + \frac{2n}{\log_2 n}$. Dovedli byste též pomoci Lenošínským?

Příklad 5.7. Protože Henryho už trošku trápilo, že za ním Lenošínští chodí s každým příkladem, nad kterým se jim nechce přemýšlet, pravil: „Samozřejmě se, sousedé mojí milí, těším, až přijdete opět na návštěvu, chtěl bych vás však poprosit, abyste mi s sebou donesli také řešení tohoto příkladu: Dokažte, že pro všechna přirozená $n > 2$ platí $\pi(2^n) < (\frac{1}{n}) \cdot 2^{n+1} \cdot \log_2(n-1)$. Při řešení tohoto příkladu můžete bez důkazu použít tvrzení z příkladu, který jste donesli vy mně.“ Pomozte Lenošínským s tímto příkladem, ať zase můžou na návštěvu ke Klevrovým.

Svá řešení posílejte na adresu

BRKOS
Janáčkovo náměstí 2a
602 00 Brno