# Zadání 4. série

Termín odeslání: 19. února 2007

**Příklad 4.1.** Jedno z mnoha náměstí v Lenošíně má tvar kosočtverce. Každou jeho stranu beze zbytku zaplňuje stejný čtvercový dům rodin Chodolenových, Ležvových, Lehmýžďových a Šnečkových. Dokažte, že středy čtvercových půdorysů těchto domů tvoří čtverec.

**Příklad 4.2.** V Hloupětíně mají kruhové mince, do kterých je vepsán pravidelný mnohoúhelník s takovým počtem stran, jako je hodnota mince v centech. Matěj si označil vrcholy mnohoúhelníku v deseticentové minci jako $A_1, \cdots, A_{10}$ a nyní se snaží bez použití počítačky dokázat, že $|A_1A_4| - |A_1A_2|$ je právě poloměr této mince. Pomozte Matějovi s tímto zapeklitým příkladem.

**Příklad 4.3.** Hloupětínští se rozhodli, že se pokusí najít alespoň jeden racionální kořen polynomu $x^2 + 2mx + 2n$ o neznámé $x$. Dokažte, že se jim to nepodaří, pokud jsou $m$ a $n$ lichá čísla.

**Příklad 4.4.** Liběnka přišla se zajímavým příkladem: Součin devíti přirozených čísel je roven $150^{2006}$. Měla dokázat, že součin některých dvou čísel z těchto devíti je roven čtverci přirozeného čísla. Pomozte Liběnce s tímto příkladem.

**Příklad 4.5.** Matěj se vrhnul do počítání Liběnčina příkladu a aby to nebylo Liběnce líto, že nic nepočítá, dal jí také příklad. Má dokázat, že pro strany trojúhelníka $a$, $b$, $c$ platí:

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}.$$

Pomůžete Liběnce ještě jednou?

**Příklad 4.6.** U nás se chodí hledat houby, v Lenošíně se chodí hledat reálná čísla. A tak jako my hledáme křemenáče, tak Lenošínští hledají taková reálná čísla $x$, že $x^n + x^{-n}$ je celé číslo pro všechna celá $n$. Všechna taková čísla se jim však nedaří najít a jsou celí zoufalí, zkuste jim pomoci.

**Příklad 4.7.** Jen co Lenošínským otrnulo, pustili se do hledání funkcí. Pokoušejí se najít všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňující pro všechna reálná $x$, $y$ rovnosti

$$f(x + f(y)) = x + f(f(y)) \quad \text{a} \quad f(2006) = 2007.$$

Nikdo z Lenošína si s tím neví rady, a tak Vás celá vesnice prosí o pomoc.

## Svá řešení posílejte na adresu


BRKOS
Janáčkovo náměstí 2a
602 00 Brno