Zadání 3. série

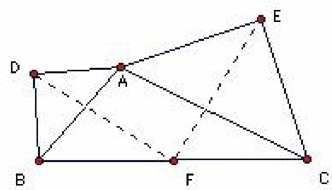
Termín odeslání: 8. ledna

Příklad 3.1. V Lenošíně se rozhodli, že začnou zkrášlovat víceciferná přirozená čísla. Dělali to tak, že vzali libovolné číslo a udělali jeho ciferný součin. Z výsledku udělali opět ciferný součin a takto pokračovali, dokud nedostali jednociferné číslo (např. $24378 \mapsto 1344 \mapsto 48 \mapsto 32 \mapsto 6$). Dokažte, že pokud je zkrášlené číslo 1, potom původní číslo bylo složeno ze samých jedniček.

Příklad 3.2. Lenošínští si všimli zajímavé skutečnosti, že pokud mají daný bod P uvnitř konvexního mnohoúhelníku M a udělají kolmé průměty bodu P na všechny přímky, na kterých leží strany mnohoúhelníku M, potom alespoň jeden z těchto průmětů leží na straně mnohoúhelníku. Jenomže už byli líní, aby to dokázali. Zvládnete to místo nich?

Příklad 3.3. Matěj s Liběnkou se vydali dovádět. Jeli si tak krásně po cyklostezce pestrobarevnou hloupětínskou přírodou a vymýšleli zajímavé příklady. Matěj si všiml neobvyklé skutečnosti, že číslo 6 se dá zapsat jako součet i součin té samé posloupnosti přirozených čísel ($6 = 3 + 2 + 1 = 3 \cdot 2 \cdot 1$). Liběnku hned zajímalo, jestli existují ještě jiná taková čísla. Pomozte Klevrovým najít všechna taková přirozená čísla, která se dají zapsat jako součet i součin té samé posloupnosti přirozených čísel.

Příklad 3.4. Mezitím přišel z práce domů Henry a náležitě si užíval odpoledne. Děti byly venku, tak rozdělal oheň v krbíku, uvařil si kávičku, zasedl do křesílka a začal si číst noviny. Než stačil přelouskat první stránku, ozval se zvonek a ve dveřích stál upovídaný soused Bedřich Zapomněl. Henry zrovna neměl náladu na dlouhé povídání, ale Béďa se nedal odbýt:



„Tož sousede, poslouchám rádio a tam soutěž, máš daný trojúhelník ABC. Pak víš, že F je střed BC, E je vrchol pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s přeponou AC a D je vrchol pravoúhlého rovnoramenného trojúhelníku s přeponou AB. Tož Henry, tady jsem ti to čárnul. Ty jo a máš dokázat, že trojúhelník DFE je pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník.“ Henry věděl, že pokud sousedovi neslíbí, že se na to podívá, tak se ho nezbaví. Pomůžete Henrymu?

Příklad 3.5. Když se Matěj s Liběnkou vrátili a viděli, jak jejich tatínek vztekle sedí nad sousedovým příkladem, ani si netroufli ho požádat o pomoc se svým domácím úkolem. Měli dokázat, že kruh o poloměru 2 lze pokrýt sedmi kruhy o poloměru 1. Pomůžete také dětem?

Příklad 3.6. V Hloupětíně měli kruhové koupaliště. Avšak nadaných matematiků, kteří se v létě rádi osvěží ve studené vodě, stále přibývalo, a tak bylo rozhodnuto o jeho rozšíření. Ke stávajícímu bazénu přibyl ještě další kruhový bazén tak, že se z něj dá přeplavat do původního a naopak. Napříč těmito bazény vede ještě lávka délky a tak, že začíná na okraji jednoho bazénu, vede přes místo, kde se setkávají okraje obou bazénů, a končí na okraji druhého bazénu. Narýsujte celé koupaliště, tedy společným bodem dvou protínajících se kružnic veďte úsečku délky a takovou, že její krajní body leží každý na jedné z kružnic.

Příklad 3.7. Matěj s Liběnkou se jednoho podzimního dne vrátili ze školy celí přepadlí. Dostali domácí úkol a vůbec si s ním nevěděli rady. A protože Henry odjel pryč, neměl jim s ním kdo pomoci. Pomozte jim, prosím, vyřešit tento úkol: Ukažte, že pro všechna přirozená $n > 1$ lze množinu $\{1, 2, ..., 2^n\}$ rozdělit na dvě disjunktní podmnožiny S, T tak, že

$$\sum_{k \in S} k^m = \sum_{l \in T} l^m$$

pro všechna $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

Svá řešení posílejte na adresu

BRKOS
Janáčkovo náměstí 2a
602 00 Brno