

# Zadání 1. série

Termín odeslání: 23. říjen 2006

## 1. příklad:

Rodina Klevrů vyrazila na dovolenou. Aby jim cesta vlakem rychle ubíhala, hráli různé hry. Jednou z nich bylo hádání čísel. Matěj pořád prohrával, už z toho byl celý otrávený a všichni se mu posmívali. A to ho štvalo možná nejvíce. Najednou se mu však zajiskřilo v očích a pravil: "Myslím si libovolné přirozené číslo. Jednu číslici z něho vyškrtnu. Od takto vzniklého nového čísla odečtu ciferný součet původního čísla. A teď, moji draží, pokud vám řeknu výsledek, dokážete určit, kterou číslici jsem vyškrtnl?" Rodina se vcelku zapotila, než na to došel Matějův tatínek Henry. Přijdete na to také?

## 2. příklad:

Ani Liběnka, Matějova ségra, nevymyslela jednoduchý příklad. Myslela si přirozené číslo  $n$  takové, že jeho ciferný součin byl  $n^2 - 10n - 22$ . Jaká čísla si Liběnka mohla myslet?

## 3. příklad:

Další hrou, kterou hráli Matěj s Liběnkou po cestě, bylo mnohoúhelníkování. S první hádankou přišel Matěj. Ptal se Liběnkou na to, kolik je trojúhelníků s vrcholy ve vrcholech konvexního  $n$ -úhelníku takových, že všechny tři jeho strany jsou úhlopříčkami v daném mnohoúhelníku. Liběnka po chvíli přemýšlení odpověděla správně. Věděli byste to také?

## 4. příklad:

I Liběnka dala Matějovi hádanku. Měl určit počet čtverců s vrcholy ve vrcholech pravidelného  $n$ -úhelníku. Matěj to samozřejmě také hnedka věděl a Liběnka řekla, že to byl jednoduchý příklad, takže dostane ještě jeden. Po chvíli hádání Matěj ustoupil a nechal Liběnkou říct ještě jednu hádanku: Uvnitř každé strany čtverce je dáno  $n$  bodů. Kolik existuje čtyřúhelníků s vrcholy v bodech na stranách čtverce? Dokázali byste také spočítat oba Matějovy příklady?

## 5. příklad:

Přes den si dovolenou Klevrovi náležitě užívali, a tak nebylo divu, že každý večer, jen co zalehli, hnedka usnuli. Jeden den jim však celý propršel, a tak Matěj s Liběnkou nemohli večer vůbec usnout. A tak, aby mohl Henry v klidu a nerušeně spát, vymyslel Matějovi a Liběnce tento příklad: Mají danou kružnici  $K$  a na ní tři body  $A, B, C$ . Mají najít bod  $D$  na kružnici  $K$  takový, aby čtyřúhelníku  $ABCD$  šla vepsat kružnice. Přijdete na to také?

## 6. příklad:

Matěj s Liběnkou řešili příklad, který jim Henry zadal, dlouho do noci a bylo jim jasné, že se jejich tatínek vzbudí daleko dříve než oni. Proto, aby je nebudil, napsali mu na lístek vzkaz, že je může probudit tehdy, až jim připraví snídani do postýlky a až najde všechna reálná čísla splňující rovnici  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$ . Dokázali byste tento příklad také vyřešit?

## **7. příklad:**

Když Matěj s Liběnkou leželi na pláži, přišly za nimi nějaké malé děti, jestli by si s nimi nešli stavět z písku. Matěj s Liběnkou s radostí šli a nestačili se divit, co už děcka postavila. Takové krásné hrady z písku ještě neviděli. Dole pod oběma hrady vedla přímá silnice (oba hrady leží v jedné polorovině určené silnicí). Děti se rozhodly, že z jednoho místa silnice povedou přímé cesty k oběma hradům. Po Matějovi a Liběnce chtěly, aby našli takové místo na silnici, aby součet délek obou cest z tohoto místa k hradům měl danou velikost  $a$ . Dokázali byste to také?