Zadání 5. série XII. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 13. 3. 2006

5.1 Rodina Klevrů jezdí ráda lyžovat. Když stáli ve frontě na vlek, Matěj s Liběnkou si krátili dlouhou chvíli hádáním čísel. Matěj si myslel přirozené číslo takové, že ho nelze napsat jako součet čtvrtých mocnin tří přirozených čísel. Liběnka jeho léčku rychle prokoukla a poznala, že takových čísel existuje nekonečně mnoho. Pomůžete jí to dokázat?

5.2 Matěj je ve škole zlobidlo, a tak musel jednoho dne zůstat po škole. A nemohl jít domů do té doby, než spočítá následující příklad. Má dokázat, že

$$\frac{(n-m)!}{m!} \leq \left(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\right)^{n-2m}$$

pro všechna přirozená čísla m, n splňující $2m \leq n$. Pomůžete osvobodit Matěje?

5.3 V Lenošíně se konal veletrh kuriozit. Byl tam vystaven i robot Maxík. Když mu řeknete reálné číslo x, on vám řekne největší hodnotu výrazu $|y^2 - xy|$ pro $y \in \langle 0, 1\rangle$. Jakou nejmenší reálnou hodnotu vám může Maxík říci?

5.4 Když se Matěj s Liběnkou zúčastnili tohoto veletrhu (jako návštěvníci, nikoliv jako kuriozity), byla tam vyhlášena soutěž. Na zemi bylo namalováno p rovnoběžných čar a q k nim kolmých také rovnoběžných čar. A návštěvníci měli uhádnout, kolik pravoúhlých čtyřúhelníků tyto čáry vytvoří. Matěj s Liběnkou tuto soutěž samozřejmě vyhráli, dokonce tento počet určili přesně. Dokázali byste to také?

Pozn.: Hádání nemělo v soutěži naději na úspěch.

5.5 Ani Liběnka není žádný svatoušek, a tak den poté, co byl po škole Matěj, tam zůstala nedoborovolně i ona. A čekal na ni zapeklitý úkol. Měla najít všechna přirozená čísla n taková, že množinu $\{n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5\}$ můžeme rozdělit na dvě neprázdné disjunktní podmnožiny tak, aby součin čísel v každé podmnožině byl stejný. Pomůžete i Liběnce?

5.6 Rodina Klevrů lyžuje nejen alpsky, ale i klasicky. Klasické lyžování dokonce provozují mnohem častěji a s větším nadšením, protože je tento druh lyžování mnohem levnější a také při provozování tohoto sportu zhlédnou o dost více krásné přírody, narozdíl od lyžování alpského.

Jednou se dostali dokonce až na Suchý vrch a chtěli se pokochat rozhledem z tamní rozhledny (která před nedávnem málem vyhořela), ale místo vstupného museli paní pokladní sdělit všechny uspořádané dvojice přirozených čísel $[m, n]$, které splňují rovnici

$$n^2 - 3mn + m - n = 0.$$

Pomůžete jim překonat totu nečekanou překážku?

5.7 Jakmile se Klevrovi dostatečně nabažili krásného výhledu, sjeli dlouhým a nebezpečným sjezdem až k pevnosti Bouda. Chtěli si samozřejmě tuto rozsáhlou podzemní pevnost prohlédnout. U vstupu je čekala nepříjemná zpráva. Strážcům museli popsat monotónní funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ splňující

$$f(xy)f(f(y)/x) = 1$$

pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^+$. Moc rádi by se do pevnosti podívali, a tak čekají na vaši pomoc.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`