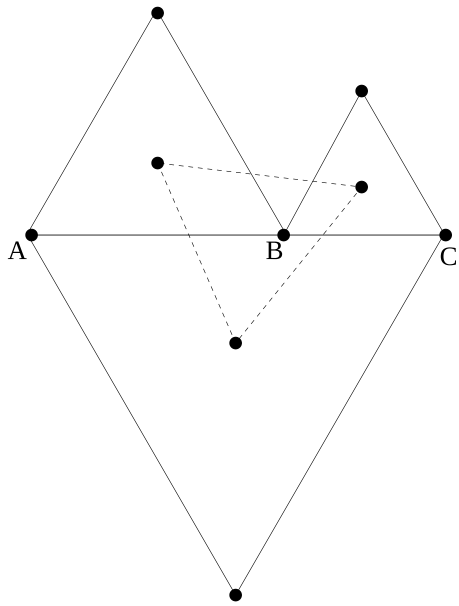
Zadání 4. série XII. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 6. 2. 2006

4.1 Před mnoha a mnoha lety bylo postaveno město Hloupětín, které mělo tři části. Všechny části byly obehnány hradbou ve tvaru rovnostranného trojúhelníka, tak jak je nakresleno na obrázku (bod B může být kdekoliv uvnitř úsečky AC). Každá z částí Hloupětína si postavila v těžišti svého území radnici. Jednoho pozorného obyvatele Hloupětína, Matěje Klevra, napadlo, že by těžiště trojúhelníka, jehož vrcholy tvořily zmiňované radnice, mohlo ležet na hranici mezi částmi Hloupětína (na úsečce AC) a že by tento trojúhelník mohl být rovnostranný. Pomůžete mu to dokázat?



4.2 Když Liběnka, Matějova sestřička, viděla, že Matěj už zase něco řeší, vrhla se k němu a snažila se mu napovídat. Matěj z toho byl čím dál nervóznější a už se schylovalo k veliké šarvátce. V poslední chvíli však zasáhl tatínek a vymyslel úlohu i pro Liběnku. Měla dané tři body K, L, M v rovině takové, že K byl patou výšky z bodu C na stranu AB, L byl patou výšky z bodu A na stranu C a bod M patou výšky z bodu B na stranu AC. Pomůžete Liběnce určit velikost stran trojúhelníka ABC v závislosti na stranách trojúhelníka KLM?

4.3 V Hloupětínské olympiádě se před časem objevila následující úloha. Je dána přímka l a na ní leží čtyři různé body A, B, C, D. Dále se má sestrojit čtverec $KLMN$ takový, že přímky obsahující strany čtverce protínají přímku l v bodech A, B, C, D. Vyřešili byste tuto úlohu?

4.4 Před časem přišli Hloupětínští za Harrym Klevrem, otcem Matěje, aby jim pomohl s následující úlohou. Měli narýsovat trojúhelník ABC se zadanou stranou c, poloměrem kružnice vepsané a poloměrem jiné kružnice dotýkající se přímky AC, přímky BC a strany c trojúhelníku ABC. Zvládnete to také?

4.5 Dokažte následující rovnost:

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{m+n+1}{n+1},$$

$n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$.

Pozn.: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; $0! = 1$.

4.6 Najděte všechny konečné podmnožiny S množiny přirozených čísel, pro které platí: $a, b \in S \Rightarrow \frac{a+b}{(a,b)} \in S$, kde (a, b) označuje největšího společného dělitele čísel a a b.

4.7 Najděte všechna $n \in \mathbb{N}$, která jsou součtem čtverců dvou navzájem nesoudělných přirozených čísel, a přitom každé prvočíslo $p \leq \sqrt{n}$ dělí jejich součin.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`