Zadání 3. série XII. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 12. 12. 2005

3.1 Polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty nabývá hodnoty 5 pro pět různých celých čísel x.

Ukažte, že $P(y) \neq 9$ pro všechna celá čísla y.

3.2 Najdětě racionální číslo $x \in (3; 4)$ takové, že $\sqrt{x-3}$ i $\sqrt{x+1}$ jsou racionální.

3.3 Víme, že existuje bod uvnitř rovnostranného trojúhelníku o straně d, jehož vzdálenosti od vrcholů tohoto trojúhelníka jsou $3, 4$ a 5. Určete vzdálenost d.

3.4 Ukažte, že n dělí $2^n + 1$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel n.

3.5 Řešte soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
2x_1 - 5x_2 + 3x_3 &\geq 0\\
2x_2 - 5x_3 + 3x_4 &\geq 0\\
&\vdots\\
2x_{23} - 5x_{24} + 3x_{25} &\geq 0\\
2x_{24} - 5x_{25} + 3x_1 &\geq 0\\
2x_{25} - 5x_1 + 3x_2 &\geq 0
\end{aligned}
$$

v oboru reálných čísel.

3.6 Najděte všechny uspořádané trojice přirozených čísel $[a, b, c]$ takové, že $a < b \wedge a < 4c \wedge bc^3 \leq ac^3 + b$.

3.7 Nechť funkce $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ splňuje následující podmínky:

1. $f(a+b) = f(f(a)+b)$ pro všechna $a, b \in \mathbb{N}_0$,
2. $f(a+b) = f(a) + f(b)$ pro $a + b < 10; a, b \in \mathbb{N}_0$,
3. $f(10) = 1$.

Nechť $m = 2^{3^{4^5}}$. Určete, kolik trojciferných čísel n splňuje $f(n) = f(m)$.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: http://www.math.muni.cz/~brkos
e-mail: brkos@math.muni.cz