Zadání 2. série XII. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 14. 11. 2005

2.1 V oboru celých čísel řešte rovnici

$$1 + x^2y = x^2 + 2xy + 2x + y.$$

2.2 V oboru reálných čísel řešte soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x^3 + 3xy^2 + 3xz^2 - 6xyz &= 1 \\ y^3 + 3yz^2 + 3x^2y - 6xyz &= 1 \\ z^3 + 3x^2z + 3y^2z - 6xyz &= 1. \end{aligned}$$

2.3 Najděte všechna přirozená čísla $n > 1$ taková, že každý prvočíselný dělitel čísla $n^6 - 1$ je i dělitelem čísla $n^5 - n^3 - n^2 + 1$.

2.4 Najděte všechna řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 - c^3 &= 3abc \\ a^2 &= 2(a + b + c), \end{aligned}$$

kde $a, b, c \in \mathbb{N}$.

2.5 Nechť $n \in \mathbb{N}$. Dále platí, že n a $3n$ mají stejný ciferný součet. Dokažte, že $9 \mid n$.

2.6 Železnice prochází 11 stanicemi $A, B, \ldots, K$ (v tomto pořadí). Vzdálenost mezi A a K je 56, vzdálenosti $AC, BD, \ldots, IK$ jsou všechny ≤ 12 a vzdálenosti $AD, BE, \ldots, HK$ jsou všechny ≥ 17.

Určete vzdálenost mezi stanicemi B a G.

2.7 V trojúhelníku ABC jsou těžnice vedené z vrcholů B a C na sebe kolmé. Označme β, resp. γ úhel při vrcholu B, resp. C.

Ukažte, že

$$\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma \geq \frac{2}{3}.$$

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`