Zadání 1. série XII. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 17. 10. 2005

1.1 Nechť ABC je rovnoramenný trojúhelník s hlavním vrcholem A a úhlem $|\angle BAC| = 100°$. Osa úhlu ABC protíná AC v bodě D.

Dokažte, že $BD + AD = BC$.

1.2 Je dána kružnice nad průměrem AB a na úsečce AB pevný bod X.

Dokažte, že pro každý bod P kružnice různý od A, B je $\frac{\tan \angle APX}{\tan \angle PAX}$ je konstantní.

1.3 Na kružnici je rozmístěno 51 přirozených čísel, jejichž součet je 150.

Dokažte, že na kružnici existuje řada čísel, jejichž součet je 100.

1.4 Dokažte, že existuje nekonečně mnoho sudých přirozených čísel k takových, že pro každé prvočíslo p je číslo $p^2 + k$ složené.

1.5 Nechť a, b, c jsou strany trojúhelníka s obvodem 1.

Dokažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}.$$

1.6 Existuje nekonečná množina přirozených čísel taková, že součet libovolných dvou jejich prvků je dělitelný jejich rozdílem?

1.7 Jestliže n je přirozené číslo větší než 1 a a přirozené číslo nedělitelné osmi, pak $a^n + a + 1$ není čtvercem žádného přirozeného čísla.

Dokažte.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`