Zadání 6. série XI. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 16. 5. 2005

6.1 Najděte nejmenší přirozené číslo n s následující vlastností: pokud první cifru čísla n přesuneme na jeho konec, dostaneme $\frac{7n}{2}$.

6.2 Nechť

$$n = 11 \dots 122 \dots 25,$$

kde počet jedniček v čísle n je x a počet dvojek $x + 1$, x je nezáporné celé číslo.

Dokažte, že pak n je druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

6.3 Přirozená čísla $a_1, a_2, \dots, a_{14}$ splňují následující rovnost:

$$\sum_{i=1}^{14} 3^{a_i} = 6558.$$

Dokažte, že se mezi těmito čísly vyskytují právě dvakrát čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

6.4 Najděte všechna přirozená čísla m, n taková, že všechny kořeny rovnice $(x^2 - mx + n)(x^2 - nx + m) = 0$ jsou přirozené.

6.5 Mějme kružnici k a na ní dva body B, C takové, že bod D, který je vrcholem rovnostranného trojúhelníka BCD, leží uvnitř kružnice k. Dále mějme bod $A \in k$ takový, že $|AB| = |BC| \wedge A \neq C$.

Nechť přímka AD protíná kružnici k v bodě $E \neq A$.

Dokažte, že $|DE| = r$, kde r je poloměr kružnice k.

6.6 Nechť $a > b > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Dokažte, že pak

$$\frac{(a-b)^2}{8a} < \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} < \frac{(a-b)^2}{8b}.$$

6.7 Víme, že soustava rovnic

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 &= 1 \\
-x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\
-x_2 + 2x_3 - x_4 &= 1 \\
-x_3 + 2x_4 - x_5 &= 1 \\
&\vdots \\
-x_{n-2} + 2x_{n-1} - x_n &= 1 \\
-x_{n-1} + 2x_n &= 1
\end{aligned}$$

má řešení v oboru přirozených čísel.

Dokažte, že pak n musí být sudé.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: http://www.math.muni.cz/~brkos
e-mail: brkos@math.muni.cz