Zadání 5. série XI. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 11. 4. 2005

5.1 Myslím si trojciferné číslo, jehož první a poslední číslice se liší. Nyní si toto číslo napíšu pozpátku. Odečtu menší číslo od většího. Dostanu opět trojciferné číslo. Pokud ne, doplním si na místo stovek cifru 0. Takto vzniklé číslo sečtu se stejným číslem, ale napsaným pozpátku. Určete výsledek.

5.2 Může být většina čísel z množiny $\{1; 2; \ldots; 1000000\}$ vyjádřena jako součet druhé mocniny a nezáporné třetí mocniny celého čísla? Svoje tvrzení zdůvodněte.

5.3 Dokažte, že v (n^2+1)-ové soustavě je číslo, které vznikne zápisem čísla $n^2 \cdot (n^2+2)^2$ pozpátku, rovno $n^4 \cdot (n^2+2)^2$.

5.4 Najděte všechna přirozená čísla n tak, že $n^3 - 18n^2 + 115n - 391$ je třetí mocninou nějakého přirozeného čísla.

5.5 Nechť $x_1, \ldots x_n$ jsou reálná čísla. Mějme následující implikaci:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0 \Rightarrow x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n + x_nx_1 \leq 0$$

Dokažte, že tato implikace platí pro $n \in \{3; 4\}$ a pro $n \geq 5$ neplatí.

5.6 Nechť a, b, c, d jsou kladná reálná čísla taková, že $abcd = 1$.
Dokažte, že potom $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} + \frac{1}{1+d} > 1$.

5.7 Dokažte, že jediné řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} x + y^2 + z^3 &= 3 \\ y + z^2 + x^3 &= 3 \\ z + x^2 + y^3 &= 3, \end{aligned}$$

kde $x, y, z \in \mathbb{R}^+$, je $x = y = z = 1$.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`