Zadání 4. série XI. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 7. 3. 2005

4.1 Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ existuje n po sobě jdoucích čísel tak, že mezi nimi není žádné prvočíslo.

4.2 Definujme vzdálenost $n-$písmenných slov A, B takto:
$\rho(A, B) = k$, kde k je počet pozic, na kterých se tato slova liší.

Dokažte, že pak platí $\forall A, B, C \in \mathbb{P}_n : \rho(A, C) \leq \rho(A, B) + \rho(B, C)$, kde $\mathbb{P}_n$ je množina všech $n-$písmenných slov.

Pozn.: Máte tedy dokázat trojúhelníkovou nerovnost v metrice na množině slov

4.3 Definujme posloupnost přirozených čísel takto:
$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, n \geq 1$ (tzv. Fibonacciho posloupnost).

Dokažte, že pak platí $\forall m \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2$ následující rovnost: $a_{n+m} = a_{n-1} \cdot a_m + a_n \cdot a_{m+1}$.

4.4 Mějme polynom $P = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $n-$tého stupně. Definujme pro něj zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n+1}[x] : \varphi(P) = \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \ldots + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x$.

Dokažte, že zobrazení definované tímto způsobem je lineární, tedy že platí
$\varphi(\alpha P + \beta Q) = \alpha\varphi(P) + \beta\varphi(Q)$.

4.5 Nechť a, b, c, d jsou reálná čísla, z nichž alespoň jedno je nenulové. Ukažte, že pak má následující soustava rovnic právě jedno řešení:

$$\begin{aligned}
ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 &= 1 \\
bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 &= 9 \\
cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 &= 8 \\
dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 &= 9.
\end{aligned}$$

4.6 Nechť $\alpha, r, s \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 1), r, s \geq 0$. Pak platí

$$r^\alpha s^{1-\alpha} \geq \alpha r + (1 - \alpha)s.$$

Dokažte.

4.7 Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy. Existuje-li

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q,$$

pak v případě $q < 1$ řada konverguje, v případě $q > 1$ diverguje.

Dokažte.

Definice limity posloupnosti:
$\lim_{n\to\infty} a_n = q \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : |a_n - q| < \varepsilon$.
Dále $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty(-\infty) \Leftrightarrow \forall A \in \mathbb{R} : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : a_n > A (a_n < A)$.
Definice konvergence a divergence řady:
Mějme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Definujme posloupnost částečných součtů:
$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \ldots s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$.
Existuje-li limita $\lim_{n\to\infty} s_n = s, s \in \mathbb{R}$, pak řada konverguje. Jestliže $lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, pak řada diverguje.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: http://www.math.muni.cz/~brkos
e-mail: brkos@math.muni.cz