Zadání 3. série XI. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 17.1.2005

3.1 Mějme čtverec $WXYZ$ o straně délky 1. Body A, B, C, D leží postupně uvnitř stran WX, XY, YZ, ZW.

Dokažte, že potom $2 \leq |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 \leq 4$.

3.2 Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Nad průměrem AB je sestrojena kružnice, která protíná stranu AC v bodě E a stranu BC v bodě F.

Dokažte, že tečny k této kružnici v bodech E a F a výška vedená z vrcholu C se protínají v jednom bodě.

3.3 Rozhodněte, zda existuje přirozené číslo, jehož druhá mocnina má stejný počet dělitelů tvaru $3k-1$ jako $3k-2$ ($k \in \mathbb{N}$).

3.4 Nechť $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ a platí $ad - bc = 1$. Pro $u, v \in \mathbb{Z}$ definujme $u' = au + bv, v' = cu + dv$.

Dokažte, že $(u, v) = (u', v')$, kde (x, y) je největší společný dělitel čísel x, y.

3.5 Reálná čísla x, y splňují dvě následující rovnosti:

$$\log_8 x + \log_4 y^2 = 5$$

$$\log_8 y + \log_4 x^2 = 7.$$

Určete, čemu je roven výraz xy.

3.6 Mějme čtverec $ABCD$, kterému je opsána kružnice a nechť P je bod, který leží na kratším z oblouků CD.

Dokažte, že pak $|PA|^2 - |PB|^2 = |PB||PD| - |PA||PC|$.

3.7 Najděte všechna $a \in \mathbb{R}$ tak, aby součet druhých mocnin kořenů rovnice

$$x^3 + (a^2+1)x^2 - (4a+3)x + 1 = 0$$

byl minimální.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`