Zadání 2. série XI. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 15. 11. 2004

2.1 Předpokládejte, že $\frac{\cos 3x}{\cos x} = \frac{1}{3}$ pro nějaký úhel $x, 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

Vyjádřete $\frac{\sin 3x}{\sin x}$ pro stejné x.

2.2 Nechť $p = (a_1, a_2, \dots, a_{17})$ je libovolné pořadí čísel $1, 2, \dots, 17$. Označme k_p největší index k takový, že ještě platí nerovnost

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k < a_{k+1} + \ldots + a_{17}.$$

Určete největší a nejmenší hodnotu k_p.

2.3 Nechť $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}^+, a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k = 1, k, n \in \mathbb{N}$.

Dokažte, že potom platí nerovnost $(n + a_1) \cdot (n + a_2) \cdot \ldots \cdot (n + a_k) \geq (n + 1)^k$.

2.4 Je dán čtyřstěn $ABCD$, přičemž platí $|\angle BAC| + |\angle CAD| + |\angle DAB| = |\angle ABC| + |\angle CBD| + |\angle DBA| = 180°$.

Dokažte, že $|CD| \geq |AB|$.

2.5 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n existuje přirozené číslo k takové, že zápis čísla $k \cdot 2^n$ v desítkové soustavě se skládá jen z jedniček a dvojek.

2.6 Mějme kouli o poloměru 1, která obsahuje 1300 daných bodů.

Dokažte, že uvnitř této koule leží koule o poloměru $\frac{2}{9}$, která obsahuje 4 z daných bodů.

2.7 Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které vyhovují rovnici

$$f(xf(y) + x) = xy + f(x).$$

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`