Zadání 1. série XI. ročníku BRKOSu

Datum odeslání: 11. 10. 2004

1.1 Dokažte pro všechna $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$:

$$\sin x_1 \cdot \cos x_2 + \sin x_2 \cdot \cos x_3 + \ldots + \sin x_{n-1} \cdot \cos x_n + \sin x_n \cdot \cos x_1 \leq \frac{n}{2}.$$

1.2 V rovině je dáno několik přímek. Za území považujeme útvar, který je ohraničen částmi daných přímek a uvnitř nějž neleží část žádné přímky.

Dokažte, že potom lze tato území obarvit dvěma barvami (každé území jednou barvou) tak, že žádná dvě sousedící území nemají stejnou barvu.

Pozn.: Dvě území spolu sousedí, pokud mají společnou úsečku.

1.3 Dokažte, že z libovolných 79 celých čísel lze vybrat několik tak, že jejich součet je dělitelný číslem 75.

1.4 Strany trojúhelníka mají délky a, b, c, kde $a, b, c \in \mathbb{N}, a > b$ a úhel naproti straně c má velikost 60°.

Dokažte, že a musí být složené číslo.

1.5 Najděte všechna celá čísla b, c tak, aby bylo $x = \sqrt{200} + \sqrt{4}$ kořenem rovnice

$$x^4 + 2bx^3 + 3bx^2 + 4c = 0.$$

1.6 Pro která přirozená čísla n je $7^n - 1$ násobkem čísla $6^n - 1$?

1.7 Najděte všechna řešení (x, p) rovnice dvou proměnných

$$x^4 + 4^x = p,$$

kde x je celé číslo a p prvočíslo.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`