Zadání 6. série X. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 10.5.2004

6.1 Najděte všechna přirozená čísla, která jsou řešením rovnice:

$$3x^2 - 10x - 26 = 0.$$

6.2 Jedna z výšek $\triangle ABC$ je menší než každá z jeho stran a tvoří s délkami stran $\triangle ABC$ čtyři za sebou jdoucí přirozená čísla. Určete velikost této výšky.

6.3 Je dána aritmetická posloupnost $308, 973, 1638, 2303, 2968, 3633, 4298$. Určete geometrickou posloupnost přirozených čísel $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$ tak, že $308 < b_1 < 973 < b_2 < 1638 < b_3 < 2303 <$ $< b_4 < 2968 < b_5 < 3633 < b_6 < 4298$.

6.4 Najděte všechna trojciferná čísla, která se rovnají součtu třetích mocnin svých cifer.

6.5 Nechť A', B' jsou kolmé průměty bodů A, B do stěn BCD a ACD čtyřstěnu $ABCD$. Jestliže A' je ortocentrem $\triangle BCD$, pak B' je ortocentrem $\triangle ACD$. Dokažte.

6.6 Nechť $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}^+, a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí nerovnost:

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \cdots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right) \geq (n+1)^n.$$

6.7 V $\triangle ABC$ jsou příčky PQ, RS, TU rovnoběžné se stranami AB, BC, CA a protínají se v bodech X, Y, Z. Určete $S_{\triangle ABC}$, jestliže příčky PQ, RS, TU dělí $\triangle ABC$ na dvě části se stejným obsahem. Dále platí, že $S_{\triangle XYZ} = 1$.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`