Zadání 5. série X. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 29.3.2004

5.1 Výška z vrcholu ostroúhlého trojúhelníka protíná protější stranu v bodě D. Z tohoto bodu jsou spuštěny kolmice DE a DF na obě zbylé strany trojúhelníka. Dokažte, že délka úsečky EF nezávisí na volbě vrcholu, z něhož je vedena výška.

5.2 Učitel přichystal na zkoušku 8 různých otázek. Každému studentovi zadá 3 z nich. Kolik nejvíce studentů se může zkoušky zúčastnit, nechce-li učitel, aby někteří dva studenti měli více než jednu společnou otázku?

5.3 Mějme mřížku 9×9 políček. Vyplníme ji čísly $1, 2, 3, \ldots, 81$ a spočítáme součty ve všech řádcích a sloupcích. Je možné vyplnit mřížku tak, aby počet všech lichých součtů byl roven počtu všech sudých součtů?

5.4 Máme čtverec o straně a. Sestrojte rovnostranný trojúhelník o stejném obsahu, jaký má daný čtverec.

5.5 Pro různá $a, b, c \in \mathbb{R}$ a vhodné $p \in \mathbb{R}$ platí:

$$a(a^2 + p) = b(b^2 + p) = c(c^2 + p).$$

Dokažte, že $a + b + c = 0$.

5.6 Najděte posledních 6 cifer čísla

$$5^{6^{7^{8^{9^{10^{11^{12}}}}}}}.$$

Pozn.: Závorkování mocnin: $5^{6^{7^{8}}} = 5^{(6^{(7^{(8)})})}$.

5.7 Najděte všechna přirozená čísla n taková, že po odstranění posledních tří cifer získáme třetí odmocninu z n.

Řešení posílejte na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: `http://www.math.muni.cz/~brkos`
e-mail: `brkos@math.muni.cz`