

Zadání 4. série X. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 16.2.2004

4.1 Řešte v \mathbb{Z} :

$$xyz = x + y + z.$$

4.2 Dokažte:

$$112 \mid (835^5 + 6)^{18} - 1.$$

4.3 Posloupnost reálných čísel s_0, s_1, s_2, \dots má následující vlastnosti:

1. $s_i s_j = s_{i+j} + s_{i-j}$ pro všechna nezáporná celá i a j , $i \geq j$
2. $s_i = s_{i+12}$ pro všechna nezáporná celá i
3. $s_0 > s_1 > s_2 > 0$.

Určete tedy čísla s_0, s_1, s_2 .

4.4 Do následující tabulky lze zapsat osm z devíti následujících čísel: 2,3,4,7,10,11,12,13,15 tak, že aritmetický průměr čísel ve všech řádcích i sloupcích je stejné přirozené číslo. Najděte všechna taková rozestavení.

1			
	9		5
		14	

4.5 Dokažte, že existuje nekonečně mnoho trojic přirozených čísel a, b, c tak, že $D(a, b, c) = 1$ a součet $a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

Pozn.: $D(a, b, c)$ značí největšího společného dělitele čísel a, b, c , tj. $D(4, 6, 10) = 2$, $D(2, 7, 8) = 1$.

4.6 Najděte nejmenší přirozené číslo n takové, že pro každé $b \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ existuje číslo tvaru $10a + b$ ($a \in \mathbb{N}_0$), které je dělitelem n .

4.7 Milan zná následující test na dělitelnost číslem 19: škrtně poslední číslici čísla a k vzniklému číslu přičte 2-násobek škrtnuté číslice. Tento postup opakuje, dokud nedostane číslo menší než 20. Původní číslo je dělitelné 19 \Leftrightarrow výsledné číslo je rovněž dělitelné 19. Poradte Milanovi obdobný test na dělitelnost 29 a dokažte jeho správnost.

Například čísla 5377 a 6058:

$\begin{array}{r} 5377 \\ \underline{537} \\ 14 \\ \underline{551} \\ 55 \\ \underline{2} \\ 57 \\ \underline{5} \\ 14 \\ \underline{19} \\ 19 \end{array}$	$\begin{array}{r} 6058 \\ \underline{605} \\ 16 \\ \underline{621} \\ 62 \\ \underline{2} \\ 64 \\ \underline{6} \\ 8 \\ \underline{14} \\ 14 \end{array}$
---	--

Z výsledku plyne, že 5377 je dělitelné 19, ale u čísla 6058 tomu tak není.

Řešení pošlete na adresu:

BRKOS
Přírodovědecká fakulta MU
Janáčkovo náměstí 2a
662 95 Brno

WWW: <http://www.math.muni.cz/~brkos>

e-mail: brkos@math.muni.cz