

### Zadání 3. série X. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 15. 12. 2003

- 3.1 Lukáš si našel o prázdninách brigádu. Pomáhal při stavbě rodinného domku pana Boucníka, který nabídl následující dohodu: „Budeš-li u mě pracovat  $n$  dní, za každý den si vydělaš  $\frac{n-i}{i(i+1)(i+2)} \cdot 1000$  Kč, kde  $i$  je pořadí dne, který u mně budeš pracovat.“ Lukáš

souhlasil a dal se do práce. Jednoho dne večer, přesně po  $n$  dnech práce, se vracel z brigády. Byl unaven, a proto jeho reakce nebyly nejrychlejší. Zaregistroval slupku od banánu, ale svoje kroky už nestihl upravit. Nastal náhlý konec práce a pan Boucník musel Lukášovi vyplatit dohodnutou mzdu. Dokažte, že celková odměna byla

$$\frac{n(n-1)}{4(n+1)} \cdot 1000 \text{ Kč.}$$

- 3.2 Určete hodnotu součtu:

$$S = \sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \mathbf{K} + \sqrt{1 + \frac{1}{2002^2} + \frac{1}{2003^2}}.$$

- 3.3 Dokažte, že pro všechna  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  platí:

$$\frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x} + \frac{1}{\left(\sin^6 x\right)\left(\cos^6 x\right)} \geq 80.$$

- 3.4 V trojúhelníku ABC jsou dány strany  $|AB|=8, |BC|=13, |AC|=15$ . Dokažte, že na straně  $|AC|$  existuje bod D tak, že vzdálenosti  $|AD|$  a  $|BD|$  jsou přirozená čísla.

- 3.5 Řešte v  $\mathbf{R}$  rovnici:

$$\frac{36}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{y}} = 42 - 9\sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

- 3.6 Dokažte, že platí následující rovnost:

$$\ln \left( \lim_{z \rightarrow \infty} \left( 0! + \frac{1}{z} \right)^z \right) + \sin^2 a + \cos^2 a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos^2 a - \operatorname{tg}^2 a}{2^n}.$$

- 3.7 Je dána kružnice a bod A mimo ni. Nechť AB a AC jsou tečny této kružnice (B a C jsou body dotyku). Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na dané kružnici.

Řešení posílejte na adresu: **BRKOS**  
Přírodovědecká fakulta MU  
Janáčkovo náměstí 2a  
662 95 Brno

WWW: <http://www.math.muni.cz/~brkos>

E-mail: [brkos@math.muni.cz](mailto:brkos@math.muni.cz)