Zadání 4. série IX. ročníku

Termín odeslání: 24.4.2000

Úloha 4.1. Dokažte, že pro reálná čísla a, b, c větší než 1 a reálné kladné r platí:

$$(\log_a bc)^r + (\log_b ca)^r + (\log_c ab)^r \geq 3 \cdot 2^r$$

Úloha 4.2. V trojúhelníku je jedna z těžnic rozdelěna kružnicí vepsanou na tři shodné úseky. Najděte poměr stran a, b, c v tomto trojúhelníku.

Úloha 4.3. Pro dané $b > 1$ urcete hodnotu integrálu:

$$\int_0^\infty \left\lfloor \log_b \left\lfloor \frac{\lceil x \rceil}{x} \right\rfloor \right\rfloor dx$$

kde $\lfloor a \rfloor, \lceil a \rceil$ je dolní resp. horní celá cást a. (Hodnota integrálu je rovna obsahu plochy ohranicené krivkou a osami x a y.)

Úloha 4.4. Jestliže hrany čtyřstěnu $ABCD$ splnují rovnost $|AB|^2+|CD|^2 = |AC|^2+|BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2$, pak alespoň jedna jeho stěna je ostroúhlý trojúhelník. Dokažte.

Úloha 4.5. Pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ platí:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : |f(x) - f(y)| \leq |x - y| \qquad \text{a} \qquad f(f(f(0))) = 0.$$

Dokažte, že pak f(0)=0.

Úloha 4.6. Šachovnice 50×50 je tvořena čtvercovými poli o straně stejné délky, jakou má hrana běžné hrací kostky s čísly 1-6. Kostku kutálíme z levého dolního do pravého horního pole tak, že na každém kroku ji překlopíme kolem hrany na sousední pole – vždy buď doprava nebo nahoru. Po dráze kostky sčítáme počty bodů na stěnách, kterými se kostka šachovnice dotýká. Dostaneme tak součet 99 čísel. Určete jeho nejmenší a největší hodnotu.

Úloha 4.7. V oboru nezáporných čísel řešte rovnici:

$$5^x \cdot 7^y + 4 = 3^z$$