Zadání 3. série IX. ročníku

Termín odeslání: 7.2.2000

Úloha 3.1. Nechť $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ jsou celá čísla s následující vlastností : Jestliže kterékoli z nich vynecháme, ostatní je možné rozdelit na dvě skupiny po n číslech se stejnými součty. Dokažte, že $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2n+1}$.

Úloha 3.2. Celá šachovnice $n \times n$ je zaplněna jezdci. Je možné jimi zároveň táhnout tak, aby žádní dva neskončili na stejném políčku?

Úloha 3.3. Dokažte, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí nerovnost

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot k^k \geq \left(\frac{k+1}{2}\right)^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

Úloha 3.4. V prostoru je dáno 9 mřížkových bodů. Dokažte, že uvnitř jedné z úseček spojující dva z těchto bodů leží nějaký další mřížkový bod. Mrížkovým bodem rozumíme bod s celočíselnými souřadnicemi.

Úloha 3.5. Určete všechny funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ splnující

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : f(nm) = f(n) + f(m) + f((n, m))$$

kde (m, n) je nejvetší společný dělitel čísel m a n.

Úloha 3.6. Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána délka strany AB, velikost úhlu při vrcholu C a poloměr kružnice trojúhelníku vepsané.

Úloha 3.7. Rozhodněte, zda je možné pokrýt celou rovinu konvexními n-úhelníky tak, aby žádné dva neměly společný vnitřní bod ani stejný počet vrcholů.