Zadání 2. série IX.ročníku

Termín odeslání: 19.11.1999

Úloha 2.1. V rovině jsou dány dve polopřímky p, q s počátky v bodech P a Q. Dvě kružnice - jedna se středem na p a procházející bodem P, druhá se středem na q a procházející bodem Q – mají vnější dotyk v bodě M. Najdete geometrické místo všech takových bodů M.

Úloha 2.2. Kolik existuje dražebních sledů v bridži? (dražební sled je určen posloupností hlášek v tom pořadí, jak následovaly v dražbě).

Úloha 2.3. Číslo nazveme totálním prvočíslem, jestliže pri každé permutaci jeho cifer dostaneme prvočíslo. Dokažte, ze v zápisu totálního prvočísla se mohou vyskytovat pouze 3 ruzné číslice. Nalezněte co nejlepší nutnou podmínku pro to, aby bylo číslo totálním prvočíslem.

Úloha 2.4. Přirozené císlo n nazveme správné, jestliže při libovolném rozmístění n navzájem různých bodu v kruhu K o poloměru 2 existuje kruh L o poloměru 1, v němž leží alespoň 10 z daných n bodů. Najděte nejmenší správné číslo.

Úloha 2.5. Pravidelný $4k$-úhelník o straně 1 je rozřezán na konečný pocet rovnoběžníků, z nichž některé mohou být pravoúhelníky. Jaký je součet obsahů takovýchto pravoúhelníků?

Úloha 2.6. Uvnitř konvexního $2n$-úhelníka $A_1A_2 \ldots A_{2n}$ je dán bod P a sestrojeny všechny přímky PA_i ($i = 1, 2, \ldots, 2n$). Dokažte, že aspoň jedna strana tohoto mnohoúhelníka nemá s žádnou ze sestrojených přímek společný vnitřní bod.

Úloha 2.7. Dokažte, že pro libovolné $a \in N$ $(a \neq 1)$ má rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

alespoň tři řešení v $\mathbb{N}^2$. Určete, kolik řešení má daná rovnice pro $a = 1999$.