Zadání 1. série IX.ročníku

Termín odeslání: 30.10.1999

Úloha 1.1. Najděte přirozená čísla n a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tak, aby $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1000$ a součin $\prod_{i=1}^{n} a_i$ byl co největší.

Úloha 1.2. Pan a paní Nečesalovi byli na večírku, kde se potkali s n dalšími páry. Nastalo vzájemné podávání rukou. Nikdo nepodal ruku svému manželovi (manželce), nikdo nepodal ruku dvakrát téže osobě a, samozřejmě, nikdo nepodal ruku sám sobě. Když podávání rukou skončilo, pan Nečesal se každého včetně své ženy zeptal, kolikrát podal ruku. Velmi ho překvapilo, že každý odpověděl jinak. Kolikrát podala ruku paní Nečesalová?

Úloha 1.3. Tětiva XY konstantní délky se pohybuje po polokruznici nad prumerem AB. Střed tětivy a paty kolmic spustených z bodu X, Y na základnu AB tvoří vrcholy trojúhelníka. Dokažte, že vsechny takto vzniklé trojúhelníky jsou rovnoramenné a vzájemne podobné.

Úloha 1.4. Dokažte, že neexistují přirozená čísla x, y, z tak, že $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

Úloha 1.5. Reálná funkce f definovaná na racionálních císlech splňuje rovnici

$$\forall x, y \in Q : f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Dokažte, že $\forall x \in Q : f(x) = f(1) \cdot x$

Úloha 1.6. Nechť a, b, c jsou délky stran libovolného trojúhelníka. Dokažte, že

$$3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 \leq 4(ab + bc + ca).$$

Úloha 1.7. Rozhodněte, zda je možné pokrýt celou rovinu n-úhelníky tak, aby žádné dva neměly společný vnitřní bod ani stejný pocet vrcholu.