

Zadání 2. série 8. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 16. 11. 1998

2.1 Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takové, že:

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : xf(x) - yf(y) = (x - y)(f(x + y) - xy).$$

2.2 Pro libovolná $x, y \in \mathbb{N}$ označme $D(x, y)$ jejich největší společný dělitel. Dokažte, že platí:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{N} : D(ab, cD(a, b)) = D(ac, bD(a, c)).$$

2.3 Určete, pro která reálná čísla $a \in \mathbb{R}$ má rovnice $a^2(1 - x)[1 - ax(1 - x)] = 1$ tři různá reálná řešení.

2.4 Dokažte, že pro libovolné prvočíslo p a přirozené číslo n je číslo $\binom{np}{p} - n$ dělitelné číslem p .

2.5 Určete kolik různých výsledků můžeme získat, vynásobíme-li mezi sebou libovolných 1998 přirozených čísel menších než 7.

2.6 Sestrojte trojúhelník, jehož výšky $v_a, v_b, v_c > 0$ jsou předem daná reálná čísla.

2.7 V libovolném trojúhelníku ABC označme a, b délky stran BC, AC a o délku osy jeho vnitřního úhlu při vrcholu C . Dokažte, že platí $o < \sqrt{ab}$.

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno