Zadání 1. série 8. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 26. 10. 1998

1.1 Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ takové, že:

$$\forall x, y \in \mathbb{N} : f(xf(y)) = yf(f(x)).$$

1.2 Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou posloupnosti přirozených čísel definované vztahy:

$$a_1 = b_1 = 1 \quad \text{a} \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n^2 + 2b_n^2, \quad b_{n+1} = 2a_n b_n.$$

Dokažte, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ jsou čísla a_n, b_n nesoudělná.

1.3 Nalezněte všechny omezené posloupnosti celých čísel $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že platí:

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+2} = x_{n+1} + x_n.$$

1.4 Rozhodněte, zda existuje nekonečně mnoho trojic čísel $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a \neq b$ takových, že platí $a^{(b^c)} = b^a$.

1.5 Dokažte, že z libovolných čtyř reálných čísel $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq 1$ lze vybrat dvě různá čísla a, b taková, že platí $ab + \sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.6 Určete všechny možné hodnoty výrazu $\frac{t_a+t_b+t_c}{a+b+c}$, kde t_a, t_b, t_c jsou délky těžnic a a, b, c jsou délky stran libovolného trojúhelníka.

1.7 Je dán trojúhelník DEF. Sestrojte trojúhelník ABC takový, že body D, E, F leží po řadě na stranách BC, AC, AB a platí $|AF| = 2|BF|$, $|BD| = 2|CD|$ a $|CE| = 2|AE|$.

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno