Zadání 6. série V. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 25.3.1996

6.1 Na kružnici jsou dány pevně dva body A, B $(A \neq B)$ a dále bod M, který probíhá celou kružnici $(M \neq A, B)$. Ze středu K úsečky MB je vedena kolmice KP na přímku MA $(P \in MA)$.
a) Dokažte,že přímky KP procházejí jedním bodem.
b) Nalezněte množinu bodů P.

6.2 Dokažte, že do konvexního čtyřúhelníku o obsahu S a obvodu P je možné umístit kruh o poloměru S/P.

6.3 Nad hranami AB, AC, AD čtyřstěnu $ABCD$ jsou sestrojeny koule. Dokažte, že koule pokrývají celý čtyřstěn.

6.4 Jsou dána nesoudělná celá čísla $p > 0$, $q > 0$. Celé číslo n nazveme dobré, jestliže je možné napsat n ve tvaru $n = xp + yq$, kde $x, y \in \mathbb{N}_0$ a špatným v opačném případě.
a) Dokažte, že existuje celé číslo c, které má následující vlastnost: pro libovolné celé číslo n je právě jedno z čísel $n, c - n$ dobré.
b) Kolik je všech kladných špatných čísel.

6.5 Nechť a, b, c, d jsou kladná čísla. Dokažte, že jedna z následujících nerovností neplatí.

$$\begin{aligned} a+b &< c+d \\ (a+b)(c+d) &< ab+cd \\ (a+b)cd &< (c+d)ab \end{aligned}$$

6.6 Je dáno n různých kladných čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Z nich jsou sestaveny všechny možné součty s libovolným počtem sčítanců (1 až n), přičemž v každém součtu se každé číslo vyskytuje nejvýše jednou. Dokažte, že mezi těmito součty je alespoň $\frac{n(n+1)}{2}$ navzájem různých čísel.

6.7 Mějme N lidí, kteří se navzájem neznají. Dokažte, že je lze seznámit tak, aby žádní tři neměli stejný počet známých.

Řešení posílejte na adresu: BRKOS
tř. kpt. Jaroše 14
BRNO
658 70