Zadání 5. série V. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 26.2.1996

5.1. Dokažte, že pokud v konvexním pětiúhelníku $ABCDE$ platí $|\angle ABC| = |\angle ADE|$ a $|\angle AEC| = |\angle ADB|$, pak $|\angle BAC| = |\angle DAE|$.

5.2. V $\triangle ABC$ je M střed BC; O střed vepsané kružnice; H pata výšky zpuštěné z A na BC; E průsečík OM a AH. Dokažte, že $|AE| = r$ (poloměr kružnice vepsané).

5.3. Dokažte, že pro libovolné $s > 1$, $s \in \mathbb{N}$ má rovnice

$$\frac{1}{x_0^2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_s^2}$$

nekonečně mnoho řešení v oboru $\mathbb{N}$.

5.4. Rozhodněte, zda existuje zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, které splňuje $f(n) = f(f(n-1)) + f(f(n+1))\ \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}$.

5.5. Nechť $a+b+c = 1$ a a, b, c jsou strany trojúhelníka. Dokažte, že $a^2+b^2+c^2 < \frac{1}{2}$.

5.6. Nechť $\{a\}_i = 0^\infty$ je posloupnost reálných čísel daná rekurentní formulí $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^{1996}}$ a rovností $a_0 = 2$. Dokažte, že platí nerovnost $a_{(k-2)k^{1996}} \geq k$ pro libovolné přirozené číslo $k \geq 2$.

5.7. Mějme M nějakou množinu n $(n \geq 3)$ různých reálných čísel. Nyní vezmeme trojici čísel a, b, c a místo nich dáme do množiny M čísla $a+b-c$, $a+c-b$, $b+c-a$. Celou tuto operaci konečněkrát opakujeme a dostaneme opět množinu M. Určete všechny množiny, které mají popsanou vlastnost.

Řešení posílejte na adresu: BRKOS
tř. kpt. Jaroše 14
BRNO
658 70