Zadání 4. série V. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 12.2.1996

4.1 Na oblouku BC, kružnice opsané rovnostrannému trojúhelníku ABC, je zvolen bod P. Přímky AP a BC se protínají v bodě Q. Dokažte, že $\frac{1}{|PQ|} = \frac{1}{|PB|} + \frac{1}{|PC|}$.

4.2 V konvexním čtyřúhelníku $ABCD$ mají strany AB a CD stejnou velikost (a nejsou rovnoběžné). Dokažte, že přímka, procházející středy stran BC a AD, svírá s přímkami AB a CD stejný úhel.

4.3 Řešte v $\mathbb{R}$ soustavu:

$$\begin{aligned}
(x_3 + x_4 + x_5)^5 &= 3x_1 \\
(x_4 + x_5 + x_1)^5 &= 3x_2 \\
(x_5 + x_1 + x_2)^5 &= 3x_3 \\
(x_1 + x_2 + x_3)^5 &= 3x_4 \\
(x_2 + x_3 + x_4)^5 &= 3x_5
\end{aligned}$$

4.4 Reálná čísla $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 2)$ splňují $x_i \geq 1\ \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Dokažte, že platí

$$(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)\ldots(x_n^2 - 1) \leq (x_1 x_2 \ldots x_n - 1)^2$$

a zjistěte kdy nastane rovnost.

4.5 Dokažte pro libovolné $a, b \in \mathbb{R}^+$ nerovnost $a^2 + 3ab + b^2 + \sqrt{ab^3} - a^3b^{-1} - b^3a^{-1} < 6a^2$

4.6 Nalezněte všechny polynomy $p(x)$ s reálnými koeficienty tak, aby
$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ \ x\,[\,p(x+2) - p(x)] - 3\,[\,3p(x+2) - p(x)] = 0$

4.7 Nechť $a, b \in \mathbb{N}$. Dokažte, že pokud $\frac{a^2+b^2}{ab-1}$ je celé číslo, pak je rovno číslu 5.

Řešení posílejte na adresu: BRKOS
tř. kpt. Jaroše 14
BRNO
658 70