Zadání 3. série V. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 27.11.1995

3.1. Každá úhlopříčka konvexního pětiúhelníku $ABCDE$ od něj odsekává trojúhelník s obsahem 1. Vypočtěte obsah pětiúhelníku.

3.2. $\triangle ABC$ je rovnoramenný se základnou AC a ostrým úhlem při vrcholu B. CD je osa úhlu u vrcholu C, kde bod D leží na straně AB. Bodem D je vedena přímka kolmá k ose. Tato přímka protíná přímku AC v bodě E. Dokažte, že $|AD| = \frac{1}{2}|EC|$.

3.3. Dokažte, že pro libovolná kladná čísla a, b, c, d platí nerovnost

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+d} + \frac{c}{d+a} + \frac{d}{a+b} \geq 2$$

.

3.4. Najděte všechna přirozená čísla x, y splňující rovnost $7^x - 3 \cdot 2^y = 1$.

3.5. Určete pro všechna $n \in \mathbb{N}$ číslo

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{k+2}{3} \binom{n}{k}$$

3.6. Uvažme tabulku 2000×2000. Do každého pole umístíme nejvýše jednu $*$. Do každého pole tabulky zapišme číslo, které označuje počet $*$ v čtverci 3×3 se středem v tomto poli, s vyjímkou, že místo čísla 9 zapíšeme číslo -10. Nalezněte maximální možný součet všech čísel v tabulce.

3.7. Nalezněte všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že platí

$$\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\} : f(\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{\sqrt{5}}{5}y) + f(\frac{2\sqrt{5}}{5}y - \frac{\sqrt{5}}{5}x) > f(x) + f(y)$$

Řešení posílejte na adresu: BRKOS
tř. kpt. Jaroše 14
BRNO
658 70