Zadání 2. série V. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 1. 11. 1995

2.1 V obdélníku $ABCD$ je bod M střed strany AD, N střed BC. Na prodloužení DC za bodem D je zvolen bod P. Nechť Q je průsečík přímek PM a AC. Dokažte, že $|\angle QNM| = |\angle MNP|$.

2.2 Je dán konvexní tětivový čtyřúhelník $ABCD$ takový, že kružnice k se středem na AB se dotýká ostatních stran. Dokažte, že $|AD| + |BC| = |AB|$.

2.3 Dokažte, že existuje nekonečně mnoho čísel $k \in \mathbb{N}$ s vlastností, že $1 + 2 + \cdots + k$ je druhá mocnina přirozeného čísla.

2.4 Najděte takovou pětici různých přirozených čísel, pro kterou platí:

(i) libovolná dvě čísla jsou nesoudělná

(ii) součet libovolného počtu čísel je číslo složené.

2.5 Dokažte, že pro libovolná $x, y, z \in (0, 1)$ platí nerovnice $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x) < 1$.

2.6 Dokažte pro libovolná přirozená $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$ $(a_1 = a_{n+1})$ nerovnost:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} \right) \geq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a_{i+1}}{a_i} \right).$$

2.7 Dokažte, že přirozené číslo $n \geq 4$ je prvočíslo právě tehdy, když $(\forall x, y, u, v \in \mathbb{N})(n = x + y + u + v \Longrightarrow xy \neq uv)$.

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno