Zadání 1. série V. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 11. 10. 1995

1.1 Je dán čtverec $ABCD$. Z vrcholu A veďme dvě polopřímky AX a AY, které svírají úhel $45°$. Nechť AX protíná stranu BC v bodě E a úhlopříčku BD v bodě P. Polopřímka AY protíná stranu CD v bodě F a úhlopříčku BD v bodě Q. Dokažte, že $\triangle AEF$ je podobný $\triangle AQP$ a určete poměr jejich obsahů.

1.2 Do kružnice s poloměrem R je vepsán pravidelný pětiúhelník $A_1A_2A_3A_4A_5$. Dokažte, že $|A_1A_2| \cdot |A_1A_3| = \sqrt{5}R^2$.

1.3 Najděte minimální hodnotu výrazu $(x+y)(x+z)$, kde x, y, z jsou kladná čísla splňující rovnost $xyz(x+y+z) = 1$.

1.4 Nechť $x, y, z \in \mathbb{N}$ a navíc x a y jsou nesoudělná. Jestliže $x^2 + y^2 = z^4$ pak součin xy je dělitelný 7. Dokažte.

1.5 V posloupnosti $1, 1, 1, 3, 5, 9, 17, 31, \ldots$ je každé číslo, počínaje čtvrtým, součtem tří bezprostředně předcházejících čísel. Dokažte, že pro každé $m \geq 2$ jsou v této posloupnosti právě tři nebo právě čtyři m-ciferná čísla.

1.6 Dokažte, že rovnice $3a^2 - 2b^2 = 1$ má v $\mathbb{N}$ nekonečně mnoho řešení.

1.7 Rozhodněte, zda existuje čtyřčlenná rostoucí aritmetická posloupnost, jejíž členy jsou tvaru n^k, kde $k, n \in \mathbb{N}$; $k, n \geq 2$.

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno