Zadání 6. série IV. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 11. 4. 1995

6.1 Na šachovnici stojí 8 figur tak, že v každém sloupci a každém řádku stojí po jedné. Dokažte, že na černých polích šachovnice stojí sudý počet figur.

6.2 Pro která $n \in \mathbb{N}$ $(n > 2)$ je možné seřadit čísla $1, \ldots, n$ na obvod kruhu tak, aby žádné z nich nebylo aritmetickým průměrem svých sousedů.

6.3 V rovině je dáno n bodů $(n > 4)$, z nichž každé tři neleží na přímce. Každé dva jsou spojeny červenou nebo modrou úsečkou a to tak, že neexistuje jednobarevný trojúhelník. Dokažte, že pak existuje uzavřená lomená čára skládající se z n červených úseček a procházející všemi body.

6.4 Ze středu O kružnice opsané ostroúhlému trojúhelníku ABC jsou spuštěny kolmice OA', OB', OC' na strany BC, AC, AB. Označíme-li R a r po řadě střed opsané a vepsané kružnice trojúhelníka ABC, pak dokažte, že platí

$$R + r = |OA'| + |OB'| + |OC'|.$$

6.5 Dokažte, že mezi $n+1$ libovolně zvolenými různými reálnými čísly $(n \geq 2)$ je možné vybrat dvě čísla x, y tak, že platí

$$0 < \frac{x - y}{1 + xy} < \operatorname{tg}\frac{\pi}{n}.$$

6.6 Nechť $a + b + c = 1$ a a, b, c jsou stranami nějakého trojúhelníka. Dokažte, že

$$a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}.$$

6.7 Řešte v oboru $\mathbb{N}$ rovnici

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{1995}.$$

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno