Zadání 5. série IV. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 13. 3. 1995

5.1 V tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ prochází úhlopříčka BD středem N úhlopříčky AC. Dokažte, že

$$2|BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2.$$

5.2 Nechť v tětivovém čtyřúhelníku $ABCD$ platí, že $|CD| = |AD| + |BC|$. Dokažte, že pak průsečík os úhlů DAB a ABC leží na CD.

5.3 Šestiúhelník $ABCDEF$ je vepsán do kružnice o poloměru R, přičemž platí $|AB| = |CD| = |EF| = R$. Dokažte, že středy stran BC, DE, FA tvoří rovnostranný trojúhelník.

5.4 Dokažte, že pro každou trojici kladných čísel x, y, z takových, že $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ platí nerovnost

$$\frac{x}{1-x^2} + \frac{y}{1-y^2} + \frac{z}{1-z^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

5.5 Nekonečná posloupnost $a_0, a_1, \ldots$ je zadána takto: $a_0 = 0; a_n = f(a_{n-1}), n = 1, 2, \ldots,$ kde $f(x)$ je mnohočlen s celými koeficienty, přičemž $f(x) \geq 0$ pro všechna nezáporná x. Dokažte, že pro libovolné $m, k \in \mathbb{N}$ platí $(a_m, a_k) = a_{(m,k)}$, kde (m, k) značí největší společný násobek čísel m a k.

5.6 Nechť $a, m \in \mathbb{N}$, $m > 1$, a není dělitelné osmi. Dokažte, že číslo $a^m + a + 1$ není druhou mocninou přirozeného čísla.

5.7 Mějme tabulku $m \times n$ složenou z m sloupců a n řádků, $m > n$. Do každého políčka tabulky je vepsána nejvýše jedna hvězdička tak, že v každém sloupci je alespoň jedna. Dokažte, že existuje hvězdička taková, že v řádku, ve kterém leží, je více hvězdiček než v sloupci, ve kterém leží.

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS

Gym., tř. kpt. Jaroše 14

658 70 Brno