

## Zadání 4. série IV. ročníku BRKOSu

- 4.1 Přírozené číslo  $n$  nazveme dokonalým, jestliže je rovno součtu svých přírozených dělitelů menších než  $n$  (např.  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ ). Dokažte, že liché dokonalé číslo (pokud existuje) nemůže být dělitelné 105.
- 4.2 Pro libovolné  $n \in \mathbb{N}$  označme  $f(n) = n + [\sqrt{n}]$ , kde  $[\sqrt{n}]$  značí celou část z  $\sqrt{n}$ . Dokažte, že pro jakékoliv přírozené  $m$  obsahuje posloupnost  $m, f(m), f(f(m)), f^3(m), \dots$  alespoň jednu druhou mocninu přírozeného čísla.
- 4.3 Necht'  $F(x)$  je mnohočlen s celočíselnými koeficienty. Víme, že pro libovolné celé  $n$  je číslo  $F(n)$  dělitelné jedním z celých čísel  $a_1, a_2, \dots, a_m$ . Dokažte, že lze z těchto čísel vybrat takové, že jím budou dělitelné všechny hodnoty  $F(n)$  pro libovolné přírozené  $n$ .
- 4.4\* Nalezněte všechna přírozená čísla  $n$ , pro která platí: pro všechna přírozená  $r$  nesoudělná s  $\varphi(n)$  je zobrazení

$$f : \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

dané předpisem  $f(x) \equiv x^r \pmod{n}$  bijektivní.

- 4.5 Dokažte, že pro libovolno dvojici trojúhelníků s úhly  $\alpha, \beta, \gamma$  resp.  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$  platí:

$$\frac{\cos \alpha_1}{\sin \alpha} + \frac{\cos \beta_1}{\sin \beta} + \frac{\cos \gamma_1}{\sin \gamma} \leq \cotg \alpha + \cotg \beta + \cotg \gamma.$$

- 4.6 Na stranách  $\triangle ABC$  jsou vně sestrojeny podobné  $\triangle ABC_1, \triangle AB_1C, \triangle A_1BC$  tak, že  $|\angle C_1AB| = |\angle A_1BC| = |\angle B_1CA|$  a  $|\angle AC_1B| = |\angle BA_1C| = |\angle CB_1A|$ . Dokažte, že  $\triangle A_1B_1C_1$  a  $\triangle ABC$  mají shodná těžiště.
- 4.7\* Je dán pravouhlý rovnoramenný trojúhelník  $ABC$  s přeponou  $AB$  a kladné reálné  $\lambda$ . Konstruktivně nalezněte pevný bod zobrazení  $Z = \mathcal{R}_{C,90^\circ} \circ \mathcal{H}_{A;\lambda}$  (rotace se středem  $C$  o  $90^\circ$  po stejnoolehlosti se středem  $A$  a koeficientem  $\lambda$ ).

**Pozn. 1:**  $\varphi(n)$  je Eulerova funkce udávající počet přírozených čísel nesoudělných s  $n$  a menších než  $n$ .

**Pozn. 2:** Příklady označené \* jsou originální.

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS  
Gym., tř. kpt. Jaroše 14  
658 70 Brno