Zadání 3. série IV. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 22. 11. 1994

3.1 V této úloze uvažujme šachové turnaje, ve kterých hraje každý hráč s každým právě jednu partii. Turnaj nazveme rovinové, jestliže v libovolné dvojici hráčů ten z nich, který nezískal více bodů než druhý, nevyhrál ve vzájemném utkání (za výhru dostane hráč jeden bod, za remízu půl, za prohru nic). Ukažte, že pro libovolný turnaj, existuje rovinové turnaj, ve kterém každý z hráčů získal stejně bodů jako v tomto turnaji.

3.2 Do políček čtvercové tabulky 50×50 jsou vepsána čísla 1 a -1 tak, že absolutní hodnota součtu čísel v tabulce nepřevyšuje 100. Dokažte, že absolutní hodnota součtu čísel v některém čtverci 25×25 nepřevyšuje 25.

3.3 Na kružnici je rozmístěno 101 hmotných bodů, jejichž hmotnosti jsou přirozená čísla (zdravíme fyziky) a dohromady váží 300. Dokažte, že na kružnici je v řadě několik hmotných bodů, jejichž úhrná hmotnost je právě 200.

3.4 V rovině je dáno $n \geq 3$ bodů, z nichž žádné tři neleží v přímce. Některé z nich spojíme úsečkami tak, aby přitom nevznikl žádný trojúhelník s vrcholy v daných bodech. Určete maximální počet $P(n)$ úseček, které jsme mohli takto zakreslit.

3.5 Definujme zobrazení P množiny celých čísel do sebe takto:

I) pro přirozené číslo n, které je zapsané dekadickými ciframi $c_k c_{k-1} \ldots c_1 c_0$ položíme $P(n) = c_0 - c_1 + \ldots + (-1)^k c_k$

II) $P(0) = 0$

III) pro záporné celé n položíme $P(n) = -P(-n)$

Určete $P(P(8^{24} - 7^{24}))$.

3.6 Pro přirozené $n \leq 2$ dokažte:

$$(1 + \frac{1}{2^3})(1 + \frac{1}{3^3}) \cdots (1 + \frac{1}{n^3} \leq \frac{27}{22}).$$

3.7 Dokažte, že pro $a, b \in \mathbb{R}^+$ platí za předpokladu $ab = 1$ následující nerovnost:

$$2\sqrt{a^3 + b^3} + 1 \leq a(a+1) + b(b+1).$$

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno