Zadání 2. série IV. ročníku BRKOSu

2.1 Dokažte, že rovnice $(2x)^{2x} - 1 = y^{z+1}$ nemá řešení v $\mathbb{N}$.

2.2 AB a CD jsou průměry jedné kružnice. Z bodu M této kružnice jsou spuštěny kolmice MP a MQ na přímky AB a CD. Dokažte, že délka úsečky PQ nazávisí od výběru bodu M.

2.3 Je dán čtverec $ABCD$. Body P a Q leží na stranách AB a BC tak, že $|BP| = |BQ|$. Nechť H je pata výšky spuštěné z B na úsečku PC. Dokažte, že $|\angle DHQ| = 90°$.

2.4 Zjistěte, zda existuje $n \in \mathbb{N}$ pro které jsou 2^{n+1} a $2^{n-1}(2^n - 1)$ třetími mocninami.

2.5 Mějme konečnou posloupnost $a_1, a_2, \ldots, a_n (n \geq 3)$ pro niž platí $a_1 = a_n = 0$ a $a_{k-1} + a_{k+1} \geq 2a_k$ pro všechna $k = 2, 3, \ldots, n-1$. Dokažte, že mezi čísly $a_1, \ldots, a_n$ není kladné.

2.6 Je známé, že $\mathrm{tg}\, \alpha_1 \cdot \mathrm{tg}\, \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}\, \alpha_n = 1$ a že Hliník se odstěhoval do Humpolce. Najděte největší množnou hodnotu výrazu $\sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin \alpha_n$.

2.7 Kladná čísla a, b, c, A, B, C splňují vztahy $a + A = b + B = c + C = K$. Dokažte, že $aB + bC + cA < K^2$.

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno