Zadání 1. série IV. ročníku BRKOSu

1.1 Dokažte, že pro libovolná lichá čísla $a, b, c \in \mathbb{Z}$ nemá rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ řešení v $\mathbb{Q}$.

1.2 Bodem P ležícím na společné tětivě dvou kružnic jsou vedeny tětivy KM a LM první a druhé kružnice. Dokažte, že čtyřúhelník $KLMN$ je tětivový.

1.3 Je dán $\triangle ABC$. Na jeho stranách AB a BC jsou vně zkonstruovány čtverce $ABMN$ a $BCPQ$. Dokažte, že středy čtverců a středy úseček MQ a AC tvoří čtverec.

1.4 Nechť číslo $A = 100101102\ldots998999$ vznikne tak, že napíšeme za sebe všechna trojciferná čísla podle velikosti. Dokažte, že A není mocnina.

1.5 Dokažte, že existují čísla A, B pro která platí

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = A \cdot \operatorname{tg} n + B \cdot n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$, kde $a_i = \operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg} (i-1)$.

1.6 Dokažte, že pro $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ platí:

$$abc \geq (a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c).$$

1.7 Dokažte pro n kladných čísel $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ nerovnost

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - \ldots + (-1)^{n+1}a_n^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1}a_n^2)^2.$$

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno