Zadání 6. série III. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 27. 4. 1994

6.1 Řešte v $\mathbb{Z}$ rovnici
$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$$

6.2 Nechť a, b jsou kladná racionální čísla a nechť číslo $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ je také racionální. Potom i čísla $\sqrt{a}$ a $\sqrt{b}$ jsou racionální. Dokažte.

6.3 Dokažte, že pro libovolná kladná reálná čísla a, b, c ne větší než jedna platí:
$$\frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ac} + \frac{c}{1+ab} \leq 2$$

6.4 Délky stran obdélníka $ABCD$ jsou přirozená čísla p, q. Obdélník je rozdělen na pq jednotkových čtverců. Určete počet těch jednotkových čtverců, jejichž vnitřkem prochází uhlopříčka AC.

6.5 Čtverečky nekonečného čtvercového papíru jsou obarveny třemi barvami. Zjistěte, zda existuje sto řádků a sto sloupců tak, že všechny jejich průsečíky mají tutéž barvu.

6.6 Ve městě tvaru čtverce o straně 10 km je 1000 policistů. Zjistěte, zda existuje čtverec se stranami délky 4 km rovnoběžnými se stranami města, v němž je alespoň 112 policistů.

6.7 Body M a P jsou středy stran BC, CD konvexního čtyřúhelníka $ABCD$. Je dána hodnota $a = |AM| + |MP|$. Dokažte, že obsah čtyřúhelníka $ABCD$ je menší než $\frac{a^2}{2}$.

Řešení zasílejte včas na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno