Zadání 5. série III. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 5. 4. 1994

5.1 Řešte v $\mathbb{Z}$ rovnici

$$x_1^4 + \ldots + x_9^4 = 1994$$

5.2$*$ Nechť p je prvočíslo, $a \in \mathbb{N}$, $(a, p) = 1$. Pak $f : \{1, 2, \ldots, p-1\} \to \{1, 2, \ldots, p-1\}$ dané předpisem $f(x) \equiv x^* \pmod{p}$ je permutace (bijekce). Dokažte.

5.3 Dokažte, že pro libovolné prvočíslo p je číslo $\underbrace{11\ldots1}_{p}\ \underbrace{22\ldots2}_{p}\ \ldots\ \underbrace{99\ldots9}_{p}\ -123456789$ dělitelné p.

5.4 Zjistěte, pro které cifry a existuje přirozené číslo n větší než 3 takové, že číslo $1+2+\ldots+n$ je zapsáno pouze pomocí cifer a.

5.5 Najděte největší hodnotu $k \in \mathbb{R}$ takovou, aby pro všechna $a, b, c \in \mathbb{R}$ platilo:

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq k(ab + bc + ca)^2$$

5.6 Do oblouku AB je vepsána lomená čára $AMB(|AM| > |MB|)$. Dokažte, že pata výšky KH zpuštěná ze středu oblouku K na úsečku AM, dělí lomenou čáru na polovinu, tzn. $|AH| = |HM| + |MB|$.

5.7 Dokažte, že plocha kolmé projekce krychle s hranou délky 1 na libovolnou rovinu je rovna délce její kolmé projekce na přímku kolmou k této rovině.

Řešení zasílejte včas na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno