Zadání 4. série III. ročníku BRKOS*u*

4.1 Dva hráči hrají následující hru: První postaví na šachovnici krále a udělá s ním jeden tah (podle pravidel šachové hry). Potom hráči střídavě pohybují králem, přičemž je zakázáno postavit krále na ta políčka šachovnice, kde již stál. Prohrává ten, kdo nemůže provést další tah. Zjistěte, který hráč má vítěznou strategii.

4.2 Nechť $\Pi(x)$ značí počet prvočísel větších než 1 a nepřevyšujících x. Dokažte, že $\Pi(x) \geq \ln(\ln x)$.

4.3 Zjistěte, zda existují $m, n \in \mathbf{N}, n < m$ taková, že $2^n + 2$ a $2^m + 1$ jsou dva po sobě jsoucí členy Fibonacciho posloupnosti.

4.4 Označme $p(n)$ počet způsobů, kolika lze rozměnit n dolarů, máte-li k dispozici pouze jedno-, pěti- a desetidolarové bankovky.

- a) Určete $p(1993)$.
- b) Řešte rovnici $n = p(n)$.

4.5 Pro $a, b, c \in \mathbf{R}^+$ dokažte nerovnost

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3 b^3 c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

4.6 Je-li $n > 1$ přirozené číslo, existuje pořadí $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ čísel $1, 2, \ldots, n$ takové, že pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ číslo a_{k+1} dělí součet $a_1 + a_2 + \cdots + a_k$. Dokažte!

4.7 Matematik $\mathcal{A}$ zná součin jistých dvou přirozených čísel větších než 1, matematik $\mathcal{B}$ jejich součet. Určete z rozhovoru, jaká jsou to čísla:

$\mathcal{A}$:„Neznám tato čísla.“
$\mathcal{B}$:„To jsem věděl.“
$\mathcal{A}$:„Už vím, která to jsou.“
$\mathcal{B}$:„Já taky.“