Zadání 3. série III. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 14. 12. 1993

3.1 Mějme několik nenulových čísel. S čísly provádíme následující operaci: vybereme dvě čísla a, b a nahradíme je čísly $a + \frac{b}{2}, b - \frac{a}{2}$. Dokažte, že již nikdy nedostaneme původní soubor.

3.2 Dokažte, že rovnice

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

má nekonečně mnoho řešení (x, y, z) v $\mathbb{Z}^3$, kde x, y, z, po dvou nesoudělná. Kolik je takových řešení, kde $z = 1993$?

3.3 **a)** Dokažte, že pro libovolné $a \in N (a \neq 1)$ má rovnice

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a}$$

alespoň tři řešení v $\mathbb{N}^2$.

b) Určete kolik řešení má daná rovnice pro $a = 1993$.

3.4 Dokažte, že $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ nerovnost

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

3.5 V $\triangle ABC$ leží bod M na straně AB a bod N na straně BC. Bod O je průsečíkem úseček CM a AN. Platí, že $|AM| + |AN| = |CM| + |CN|$. Dokažte, že $|AO| + |AB| = |CO| + |CB|$.

3.6 Mějme rovnoramenný pravoúhlý $\triangle ABC$ s pravým úhlem u vrcholu C. Na stranách AC a BC jsou dány body D, E tak, že $|CD| = |CE|$. Prodloužení kolmic spuštěných z D a C na přímku AE protínají AB v bodech K a L. Dokažte, že $|KL| = |LB|$

3.7 Z klobouku, ve kterém je r koulí očíslovaných od 1 do r, n-krát vytáhneme z klobouku jednu kouli a dáme ji zpět. Jaká je pravděpodobnost, že součet čísel na vytažených koulích je s?

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno