Zadání 2. série III. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 23. 11. 1993

2.1 Dokažte, že pro libovolné přirozené n je předposlední cifra čísla 3^n sudá.

2.2 Řekneme, že číslo je úspěšné, jestliže cifry v jeho desítkovém zápise lze rozdělit do dvou skupin tak, že součty cifer v těchto skupinách jsou si rovny. Najděte nejmenší přirozené úspěšné číslo.

2.3 Mějme z papíru vyřezaný konvexní mnohoúhelník. Desetkrát ho libovolně přeložíme (vždy podél nějaké přímky) a poté podél nějaké další přímky rozstřihneme. Kolik kousků papíru můžeme nejvíce dostat?

2.4 Uvnitř konvexního $2n$-úhelníka $A_1A_2\ldots A_{2n}$ je dán bod P a sestrojeny všechny přímky $PA_i (i = 1, 2, \ldots, 2n)$. Dokažte, že aspoň jedna strana tohoto mnohoúhelníka nemá s žádnou se sestrojených přímek společný vnitřní bod.

2.5 V čtyřúhelníku $ABCD$ je E střed AB, K střed CD. Dokažte, že středy úseček AK, CE, BK, DE jsou vrcholy rovnoběžníku.

2.6 Pro konvexní čtyřúhelník $ABCD$ platí $S \leq \frac{1}{2}(|AB||CD| + |BC||AD|)$. Dokažte a rozhodněte kdy nastane rovnost.

2.7 Je dán konvexní čtyřúhelník $ABCD$ takový, že délky obou jeho uhlopříček mají shodnou délku. Nechť O_1, O_2, O_3, O_4 značí středy vně připsaných rovnostranných trojúhelníků ke stranám AB, BC, CD, DA. Dokažte, že přímky O_1O_3 a O_2O_4 jsou vzájemně kolmé.

Řešení zasílejte na adresu:

BRKOS
Gym., tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno