Zadání 1. série III. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 29. 9. 1993

1.1 Čokoládová tabulka je složena z $m \cdot n$ obdélníčků. Kolikrát nejméně ji musíme rozlomit, abychom získali jednotlivé obdélníčky? (rozlamujeme vždy jen jednu vrstu čokolády)

1.2 Ve vrcholech pravidelného šestiúhelníka o straně a jsou umístěny středy kružnic o poloměru $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Určete obsah části šestiúhelníka ležící vně kružnic.

1.3 Je dána kružnice a bod A mimo ni. Nechť AB a AC jsou tečnami této kružnice (B a C jsou body dotyku). Dokažte, že střed kružnice vepsané trojúhelníku ABC leží na dané kružnici.

1.4 Mějme rovnice

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= n \\ x^2 + y^2 &= 2n, \end{aligned}$$

kde $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že mají stejný počet řešení v $\mathbb{Z}$.

1.5 Existuje nekonečná množina přirozených čísel taková, že součet libovolných dvou jejích různých prvků je dělitelný jejich rozdílem?

1.6 Číslo m je nejmenší počet kruhů o poloměru 1, kterými je možné pokrýt zadaný konvexní mnohoúhelník $\mathcal{M}$, číslo n je největší počet kruhů o průměru 1, které se nepřekrývají a jejichž středy náleží mnohoúhelníku $\mathcal{M}$. Určete, které z obou čísel m a n je alespoň tak velké, jako to druhé.

1.7 Rozhodněte, který ze dvou mnohočlenů

$$F(x) = (1 + x^2 - x^3)^{1000}, \qquad G(x) = (1 - x^2 - x^3)^{1000}$$

má větší koeficient u mocniny x^{20}.

Řešení zasílejte na adresu:

Brkos
tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno