Zadání 5. série II. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 26. 4. 1993

5.1 Dokažte, že pro libovolné přirozené n existuje číslo, sestavené pouze z cifer 1 a 2, dělitelné 2^n.

5.2 Dokažte, že jestli p, q, r jsou racionální čísla a platí: $(p+q+r)^2 = p^2+q^2+r^2$, potom $(1+p^2)+(1+q^2)+(1+r^2)$ je druhou mocninou racionálního čísla.

5.3 Čtyři vesnice leží ve vrcholech čtverce o straně 2 km. Vesnice jsou spojeny cestami tak, že z každé se lze dostat po cestě do libovolné jiné. Může být celková délka cest menší než $5,5$ km?

5.4 Dokažte, že pro libovolná kladná a, b, c platí:

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geq \sqrt{a^2+ac+c^2}$$

5.5 Posloupnost $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dána takto: $r_1 = 2, r_{n+1} = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_n + 1$. Dokažte, že

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\ldots+\frac{1}{r_n} < 1.$$

5.6 Kolik existuje různých celých čísel, které lze zapsat ve tvaru $a - a^*$, kde a je n-ciferné číslo $(10^{n-1} \leq a < 10^n)$, a^* vzniklo zápisem cifer čísla a v obráceném pořadí?

5.7 Mějme N lidí, kteří se navzájem neznají. Dokažte, že je lze seznámit tak, aby žádní tři neměli stejný počet známých.

Řešení zasílejte na adresu:

Brkos
tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno