Zadání 4. série II. ročníku BRKOSu

Termín odeslání: 8. 3. 1993

4.1 Mějme n přirozených čísel $a_1, a_2, \dots, a_n$. Uvažme množinu

$$A = \{x; x = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i, \varepsilon_i \in \{0,1\}\}.$$

Dokažte, že množina A obsahuje číslo dělitelné n.

4.2 Řešte v $\mathbb{Z}$:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^2 y^2$$

4.3 Projekce tělesa do každé ze dvou daných rovin je kruh. Dokažte, že tyto kruhy mají stejné průměry.

4.4 Dokažte:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} k^n = (-1)^n n! \qquad (n \in \mathbb{N})$$

4.5 Nechť $f(x) = x^2 - x + 1$. Dokažte, že pro libovolné přirozené číslo $m > 1$, jsou čísla $m, f(m), f(f(m)), \dots$ po dvou nesoudělná.

4.6 Pravidelný $4k$-úhelník o straně 1 je rozřezán na konečný počet rovnoběžníků, z nichž některé mohou být pravoúhelníky. Jaký je součet úhlů takovýchto pravoúhelníků?

4.7 Dokažte, že z libovolných dvou set čísel lze vybrat sto, jejichž součet je dělitelný stem.

Upozorňujeme, že všem řešitelům čtvrté série bude přidělena prémie 50 bodů!!

Řešení zasílejte na adresu:

Brkos
tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno