Zadání 3. série II. ročníku BRKOSu

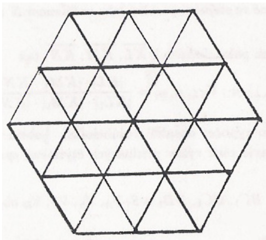
Termín odeslání: 18. 1. 1993

3.1$*$ Najděte alespoň jeden reálný kořen rovnice

$$-x^8 + 6x^5 + x^3 - 9x^2 - 3 = 0.$$

3.2 Číslo nazveme totálním prvočíslem, jestliže při každé permutaci jeho cifer dostaneme prvočíslo. Dokažte, že v zápisu totálního prvočísla se mohou vyskytovat pouze 3 různé číslice. Nalezněte co nejlepší nutnou podmínku pro to, aby bylo číslo totálním prvočíslem.

3.3 Mějme pravidelný šestiúhelník rozdělený na 24 trojúhelníků (viz obr.). Do všech 19 uzlů útvaru na obrázku jsou zapsána různá čísla. Dokažte, že z těchto 24 trojúhelníků lze vybrat 7 tak, že budou mít ve vrcholech zapsána čísla v rostoucím pořádku (při průchodu v kladném smyslu).



3.4 Hráč A háže $(n+1)$-krát desetikorunou, hráč B n-krát. Jaká je pravděpodobnost toho, že hráč A hodí vícekrát „Masaryka" než hráč B.

3.5 Dokažte:

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^n \binom{n}{k} k^n = (-1)^{n+1} n!$$

3.6 Dokažte:

$$\sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{1}{(x+r)(x+r+1)\cdot \ldots \cdot (x+r+n)} = \frac{2^n}{x(x+2)(x+4)\cdot \ldots \cdot (x+2n)}$$

3.7 Přirozené číslo n nazveme „správné", jestliže při libovolném rozmístění n navzájem různých bodů v kruhu K o poloměru 2 existuje kruh L o poloměru 1, v němž leží alespoň 10 z daných n bodů. Najděte nejmenší „správné" číslo.

Řešení zasílejte na adresu:

Brkos
Gymnázium, tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno