Zadání příkladů 2. série II. ročníku BRKOSu

2.1$*$ Kolik existuje různých dražebních sledů v bridži?
(dražební sled je určen posloupností hlášek v tom pořadí, jak následovaly v dražbě).

2.2 Dokažte, že pro libovolná reálná čísla x, y, z, a, b, c platí:

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z)$$

2.3 Dokažte, že do libovolného konvexního n-úhelníka o obsahu V lze umístit nějaký pravoúhelník o obsahu $\frac{V}{4}$.

2.4 Najdi $(ax^5 + by^5)$, jsou-li a, b, x, y reálná čísla a platí-li:

$$ax + by = 3, \qquad ax^2 + by^2 = 7, \qquad ax^3 + by^3 = 16, \qquad ax^4 + by^4 = 42.$$

2.5 Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1} = A_1$ jsou body v rovině takové, že existuje kružnice dotýkající se všech přímek A_iA_{i+1}, ale žádné z úseček A_iA_{i+1} se nedotýká ve vnitřním bodě. Dokažte, že potom existují taková reálná $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, jejichž absolutní hodnota je rovna jedné, že

$$\varepsilon_1|A_1A_2| + \varepsilon_2|A_2A_3| + \ldots + \varepsilon_n|A_nA_1| = 0.$$

2.6$*$ Rozhodněte, zda existuje takový rozklad roviny na konvexní mnohoúhelníky, že libovolný n-úhelník $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ je v něm obsažen právě jednou.

2.7 Uvažme posloupnost přirozených čísel takovou, že každý následující člen posloupnosti vznikne z předchozího připsáním jedné cifry. Žádný člen posloupnosti neobsahuje cifru devět. Dokažte, že nekonečně mnoho členů posloupnosti jsou složená čísla.

Příklady pro vás připravili: Josef Menšík (2.3,2.5), Pavel Vrbacký (2.2,2.4,2.7), Martin Panák (2.1) a Michal Konečný (2.6)

Na vaše řešení se těšíme na už známé adrese:

Brkos
Gymnázium, tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno