Zadání 1. série II. ročníku BRKOSu

1.1 Každý bod roviny je obarven právě jednou ze tří barev. Dokažte, že v této rovině existuje rovnoramenný trojúhelník, jehož všechny vrcholy mají stejnou barvu.

1.2 Je dán čtyřstěn $ABCD$ o objemu S. Body A_1, B_1, C_1, D_1 leží na jeho stěnách oproti vrcholům A, B, C, D (po řadě) tak, že přímky AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 se protínají v jednom bodě. Označme S_1 objem čtyřstěnu A_1, B_1, C_1, D_1. Dokažte: $27S_1 \leq S$.

1.3 Nechť M je množina k po dvou disjunktních úseček ležících na jedné přímce. Platí, že libovolnou úsečku délky nejvýše 1 lze umístit na danou přímku tak, že oba její krajní body leží v M. Dokažte, že součet délek úseček množiny M je aspoň $\frac{1}{k}$.

1.4 Najděte všechny dvojice celých čísel x, y splňující rovnost

$$x^2 + x = y^4 + y^3 + y^2 + y.$$

1.5 Pro která celá m, n platí

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n?$$

1.6 Ať vzdálenosti bodu M roviny trojúhelníka ABC od jeho vrcholů A, B, C jsou po řadě a, b, c. Dokažte, že pro každé $d \neq 0$ platí: Neexistuje bod této roviny se vzdálenostmi od vrcholů A, B, C po řadě rovnými $\sqrt{a^2 + d}, \sqrt{b^2 + d}, \sqrt{c^2 + d}$.

1.7 Najdi trojúhelník o nejmenším obsahu, kterým lze pokrýt libovolný trojúhelník se stranami ne většími než 1.

Řešení zasílejte na adresu:

Brkos
Gymnázium, tř. kpt. Jaroše 14
658 70 Brno