Zadání příkladů 4. série BRKOSu

Termín odeslání: 11. 5. 1992

4.1$*$ Nalezněte všechny čtyřúhelníky K, jimiž lze pokrýt celou rovinu (tzn. existuje rozklad roviny, jehož každý blok je identický s K.

4.2$*$ Zvolme náhodně n bodů v daném kruhu. Jaká je pravděpodobnost, že tyto body tvoří vrcholy nějakého n-úhelníka obsahujícího střed daného kruhu?

4.3 Rozhodněte, zda v každé nekonečné aritmetické posloupnosti přirozených čísel existují dva členy se stejným ciferným součtem.

4.4 **a)** Kolik existuje permutací φ čísel $1, 2, \ldots, n$ takových, že $\forall i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\varphi^{-1}(i) > 1 \Longrightarrow (\varphi^{-1}(i-1) < \varphi^{-1}(i)) \vee (\varphi^{-1}(i+1) < \varphi^{-1}(i))$$

b) Kolik existuje permutací φ čísel $1, 2, \ldots, n$ takových, že $\forall i = 1, 2, \ldots, n$:

$$\varphi(i) > 1 \Longrightarrow (\varphi(i-1) < \varphi(i)) \vee (\varphi(i+1) < \varphi(i))$$

Pozn.: φ^{-1} je inverzní funkce k φ, tj. $\forall x \in \mathcal{D}(f) : \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$.

4.5 Posloupnost a_k přirozených čísel má tuto vlastnost:
součet $\sum_{i=1}^{n-k} a_i a_{k+i}$ je liché číslo $\forall k = 0, 1, \ldots, n-1$

a) udejte příklad takové posloupnosti pro $n = 25$

b) zjistěte, zda taková posloupnost existuje i pro některé $n > 1000$.

4.6 Dokažte, že pro libovolný trojúhelník s délkami stran a, b, c a obsahem S platí:

$$\frac{ab + ac + bc}{4S} \geq \sqrt{3}$$

4.7 Rozhodněte, zda existuje $p \in \mathbb{R}$ takové, že:

$$(\forall q \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) : |\{pm\} - \{q\}| < \varepsilon$$

kde $\{x\}$ značí necelou část z x, tedy $\{x\} = x - [x]$.

Pozn. 1: Přirozená čísla jsou celá kladná čísla.
Pozn. 2: Příklady označené hvězdičkou se opět nesnažte hledat v literatuře.